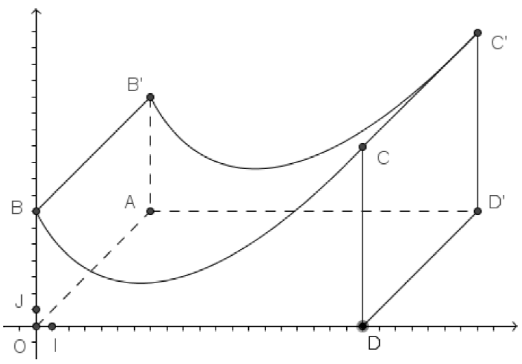
Bac S 2015 – Métropole - Correction épreuve de mathématiques.

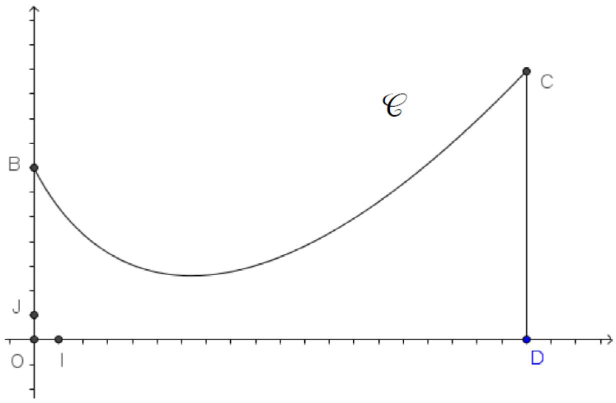
Exercice 3 : 4 points – Commun à tous les candidats



Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.
Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères $OAD'D, DD'C'C$ et $OAB'B$ sont des rectangles.
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, $DD' = 10$, sa longueur OD est de 20 mètres.
Le but du problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.
Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et C la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J).



Partie 1

1°) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 20]$, on a $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.

2°) En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0; 20]$ et dresser son tableau de variation.

3°) Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

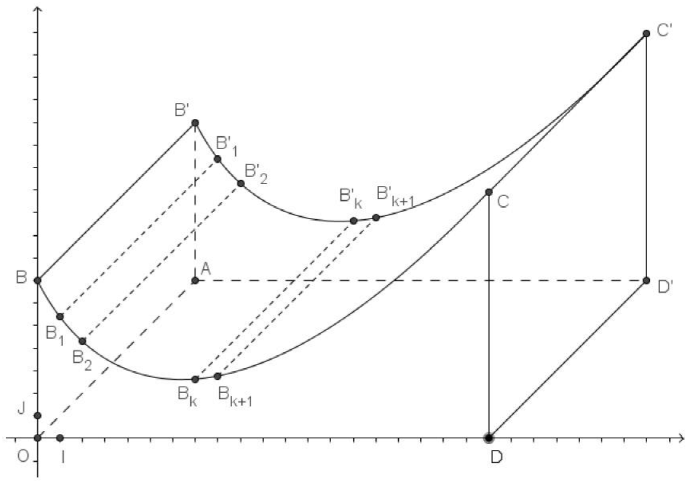
La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4°) On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 20]$.

Partie 2
Les trois questions de cette partie sont indépendantes
1°) Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.
P1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.
P2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

2°) On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m² par litre.
Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

3°) On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.
Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k; f(k))$ pour k variant de 0 à 20.
Ainsi, $B_0 = B$.
On décide d'approcher l'aire de la courbe C allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_k B_{k+1}]$.
Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_k, B_{k+1}, B'_{k+1}, B'_k$ (voir figure).



a) Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19, $B_k B_{k+1} = \sqrt{1 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2}$

b) Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables Fonction	S: réel K: entier f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de …… à …… S prend pour valeur …………………… Fin Pour
Sortie	Afficher …..

CORRECTION

Partie 1

1°) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 20]$, on a $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.

On sait que pour tout $x \in [0; 20]$ $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$

La fonction $x \mapsto x + 1$ est dérivable sur $[0; 20]$ et positive stricte donc d'après le cours,
la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est dérivable sur $[0; 20]$.
Ainsi par produit, la fonction $x \mapsto (x+1)\ln(x+1)$ est dérivable sur $[0; 20]$.
D'autre part, la fonction $x \mapsto -3x + 7$ est dérivable sur $[0; 20]$ car c'est une fonction polynôme, donc par somme, f est dérivable sur $[0; 20]$ et on a :

Pour tout $x \in [0; 20]$ $f'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) + 1 - 3$

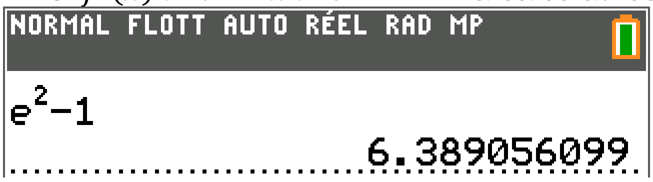
Conclusion : Pour tout $x \in [0; 20]$ $f'(x) = \ln(x+1) - 2$

2°) En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0; 20]$ et dresser son tableau de variation.

Cherchons les réels $x \in [0; 20]$ tels que $f'(x) > 0$:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - 2 > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 2 \Leftrightarrow x + 1 > e^2$ car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

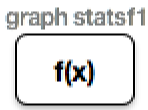
Ainsi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > e^2 - 1$. A la calculatrice on obtient $e^2 - 1 \approx 6{,}39$



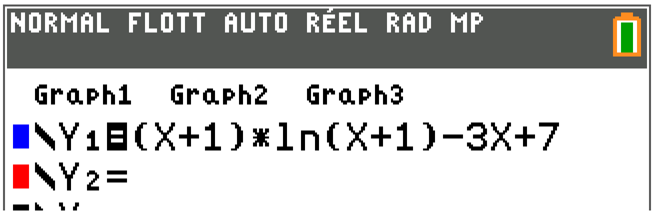
Donc f est croissante sur $[e^2 - 1; 20]$ et f est décroissante sur $[0; e^2 - 1]$.
D'où le tableau de variations :

x	0		$e^2 - 1$		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	$\searrow$	$-e^2 + 10$	$\nearrow$	$21 \ln 21 - 53$

$f(0) = (0 + 1)\ln(0 + 1) - 3 \times 0 + 7 = 7$

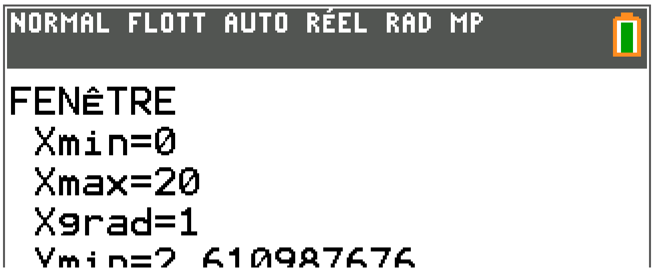
Représentons graphiquement sur notre TI83 Premium cette fonction en appuyant sur 

puis on entre l'expression de la fonction :



On appuie sur 

pour entrer l'ensemble de définition :

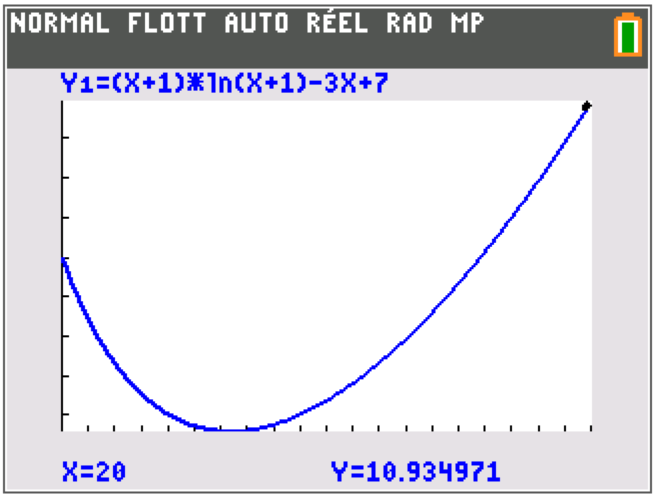


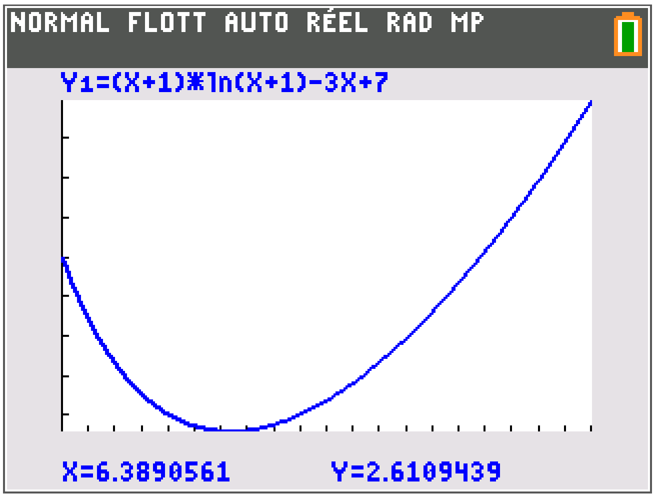
Pour ajuster la fenêtre automatiquement, appuyons sur format f3 zoom 0↓AjustZoom

Calculons les images de 20 et $e^2 - 1$:

$f(20) = (20+1)\ln(20+1) - 3 \times 20 + 7$
$= 21\ln 21 - 53 \approx 10{,}93$

On le vérifie en appuyant sur 2nde calculs f4 trace 1:valeur et on entre 20 pour la valeur de x.





$f(e^2 - 1) = (e^2)\ln(e^2) - 3(e^2 - 1) + 7$
$= -e^2 + 10 \approx 2{,}61$

3°) Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0 est $f'(0)$.
Et on a $f'(0) = \ln(0+1) - 2 = -2$
L'inclinaison du module de skateboard au point B est donc 2.

4°) On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0;20]$ par $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0;20]$ par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;20]$.

On sait que pour tout $x \in [0;20]$ $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7 = g'(x) - 3x + 7$
Ainsi une primitive de f sur $[0;20]$ est la fonction F définie par : $F(x) = g(x) - \frac{3}{2}x^2 + 7x$

Partie 2
Les trois questions de cette partie sont indépendantes
1°) Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.
P1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

En reprenant la tableau de variation de f on a :

x	0		e^2-1		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	$\searrow$	$-e^2+10 \approx 2{,}61$	$\nearrow$	$21\ln 21-53 \approx 10{,}93$

Ce qui nous donne une différence de hauteur de $10{,}93 - 2{,}61 = 8{,}32$ mètes.
La proposition est donc vraie.

P2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

On a vu dans la question I.3°) que l'inclinaison du module de skateboard au point B est 2.

D'autre part $f'(20) = \ln(20+1) - 2 = \ln(21) - 2 \approx 1{,}04$

```
ln(21)-2
                1.044522438
```

Ce qui prouve que l'inclinaison du module de skateboard au point C n'est pas 2 fois plus grande qu'en B.
La proposition ¨P2 est donc fausse.

2°) On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m² par litre.
Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

L'aire de la partie du plan délimitée par les points $ODCB$ est

$$\int_0^{20} f(x)dx = F(20) - F(0) = \frac{1}{2}21^2\ln(21) - \frac{1}{4}\times 20^2 - \frac{1}{2}\times 20 - \frac{3}{2}\times 20^2 + 7\times 20 = \frac{441}{2}\ln(21) - 570$$
$\approx 101{,}31$

```
1/2*21²*ln(21)-1/4*20²-1/2*20-3/2▸
                         101.3171975
```

Vérifions en appuyant sur 2nde ∫□□d□▸G et choisissons ∫□□ d□ :

```
∫₀²⁰(Y₁(X))dX
                         101.3171975
```

L'aire de la partie $DD'C'C$ est $f(20)\times 10 \approx 109{,}35$

```
10*Y₁(20)
                         109.3497119
```

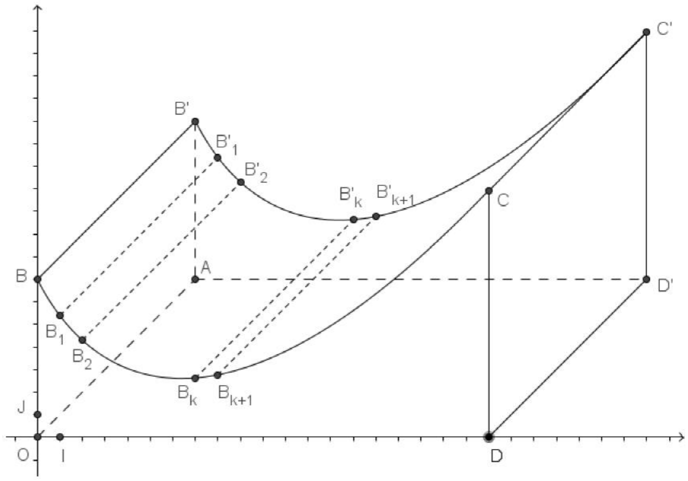
L'aire du rectangle $OBB'A$ est $f(0)\times 10 = 70$

La surface totale est donc

$$2\times\int_0^{20} f(x)dx + f(20)\times 10 + 70$$

Soit environ 3821 m² ce qui correspond à 77 litres environ.

```
∫₀²⁰(Y₁(X))dX*2+70+10*Y₁(20▸
                          381.984107
Rep/5
                         76.39682139
```



3°) On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.
Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k; f(k))$ pour k variant de 0 à 20.
Ainsi, $B_0 = B$.
On décide d'approcher l'aire de la courbe C allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_kB_{k+1}]$.
Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_k, B_{k+1}, B'_{k+1}, B'_k$ (voir figure).

a) Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19, $B_kB_{k+1} = \sqrt{1 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2}$

On a $B_k\left(k; f(k)\right)$ et $B_{k+1}\left(k+1; f(k+1)\right)$.

Ainsi $B_kB_{k+1} = \sqrt{(k + x - k)^2 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2} = \sqrt{1 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2}$

---

b) Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables Fonction	S: réel K: entier f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de .. 0 .. à 19 S prend pour valeur $S + \sqrt{1 + \left(f(K+1) - f(K)\right)^2}$ Fin Pour
Sortie	Afficher S ..

Ce qui nous donne une fois l’algorithme exécuté :

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:BAC
:0→S
:For(K,0,19)
:S+√(1+(Y1(K+1)−Y1(K))²)→S

:End
:Disp S
```

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
prgmBAC
                  24.52043147
                         Fait
```