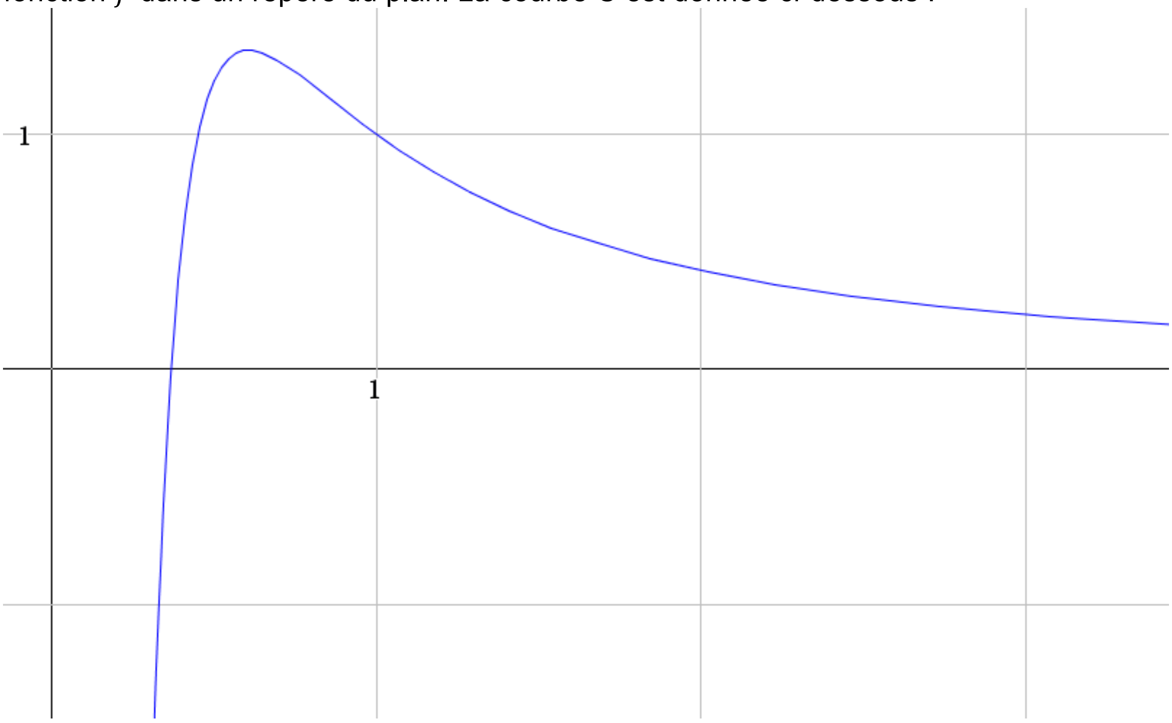
# ÉTUDE DE FONCTION 2

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$ et soit C la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère du plan. La courbe C est donnée ci-dessous :




1. a. Étudier la limite de $f$ en 0.
   b. Que vaut
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$$
   En déduire la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.
   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe C.

2. a. On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}$

   b. Résoudre sur l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   c. Dresser le tableau des variations de la fonction $f$.

3. a. Démontrer que la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $I_n$ l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.

a. Démontrer que $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$.

On admet que la fonction $F$, définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{-2-\ln(\square)}{x}$,est une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b. Calculer $I_n$ en fonction de $n$.

c. Étudier la limite de $I_n$ en +∞. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

# CORRIGÉ

**Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$.**

**1. a. Étudier la limite de $f$ en 0.**

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to 0}(1+\ln(x)) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^+\end{array}\right\}\text{par quotient } \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

**b. Que vaut**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$$

**En déduire la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.**

$\text{D'après le cours on a :} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Or pour tout $x \in ]0;+\infty[$ on a $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\end{array}\right\}\text{par produit } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0\end{array}\right\}\text{donc par somme } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

**c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe C.**

$\text{D'après 1. a. on a } \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C.

$\text{De plus d'après 1. b. on a } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

**2. a. On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.**
**Démontrer que, pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{-1-2\ln(x)}{x^3}$**

D'après le cours, la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$, donc la fonction $x\mapsto 1+\ln(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.
De plus la fonction $x\mapsto x^2$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ car c'est une fonction polynôme.
Par quotient, $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Et on a pour tout $x\in\,]0;+\infty[$ $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-(1+\ln(x))\times 2x}{(x^2)^2}=\frac{x-2x-2x\ln(x)}{x^4}=\frac{-1-2\ln(x)}{x^3}$

**b. Résoudre sur l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x)>0$.**
**En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.**

$$-1-2\ln(x)>0\Leftrightarrow 2\ln(x)<-1\Leftrightarrow \ln(x)<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x<e^{-\frac{1}{2}}$$

On sait que pour tout $x\in\,]0;+\infty[$ $f'(x)=\frac{-1-2\ln(x)}{x^3}$, étant donné que $x>0$ alors $x^3>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $-1-2\ln(x)$, ainsi $f'(x)>0\Leftrightarrow x\in\left]0;e^{-\frac{1}{2}}\right[$ et $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in\left]e^{-\frac{1}{2}};+\infty\right[$

**c. Dresser le tableau des variations de la fonction $f$.**

| $x$ | $0$ | | $e^{-\frac{1}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}e$ | $\searrow$ | $0$ |

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1+\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2}=\frac{1-\frac{1}{2}}{e^{-1}}=\frac{1}{2}e$$

**3. a. Démontrer que la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.**

$$M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \in C \cap (Ox) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x \in \left]0;+\infty\right[ \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x \in \left]0;+\infty\right[ \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

Résolvons donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1+\ln(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow e = e^{-1}$ qui est positif strict.

<u>**Conclusion :**</u> $C \cap (Ox)$ admet un unique point d'intersection qui a pour coordonnées $\left|\begin{matrix} e^{-1} \\ 0 \end{matrix}\right.$

**b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.**

En reprenant le tableau de variation et le résultat du 3.b. on a :

| $x$ | $0$ | | $e^{-1}$ | | $e^{-\frac{1}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}e$ | $\searrow$ | $0$ |

**4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $I_n$ l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.**

**a. Démontrer que $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$.**

On a : $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{2} f(x)dx$

Or d'après le tableau de variation : pour tout $x \in \left[\frac{1}{e};2\right]$ $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}e$ donc

$$0 \leq \int_{\frac{1}{e}}^{2} f(x)dx \leq \frac{1}{2}e \times \left(2 - \frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow 0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$$

**On admet que la fonction $F$, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x) = \frac{-2-\ln(x)}{x}$,est une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.**

**b. Calculer $I_n$ en fonction de $n$.**

$$I_n = \int_{\frac{1}{e}}^{n} f(x)dx = F(n) - F\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-2-\ln(n)}{n} - \frac{-2-\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = \frac{-2-\ln(n)}{n} - \frac{-2+1}{\frac{1}{e}} = \frac{-2-\ln(n)}{n} + e$$

<u>**Conclusion :**</u> $I_n = \frac{-2-\ln(n)}{n}$

**c. Étudier la limite de $I_n$ en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.**

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{2}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{\ln(n)}{n} = 0 \text{ d'après le cours} \end{array}\right\} \text{par somme } \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$