EXERCICE 5 : **5 points**

Commun à tous les candidats

On souhaite stériliser une boîte de conserve.
Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25°$ C et on la place dans un four à température constante $T_F = 100°$ C.

La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85°C.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A :Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	$\boldsymbol{T}$ **prend la valeur 25**
Traitement :	**Demander la valeur de** $\boldsymbol{n}$
	Pour $\boldsymbol{i}$ **allant de 1 à** $\boldsymbol{n}$ **faire**
	$\boldsymbol{T}$ **prend la valeur** $\boldsymbol{0,85 \times T + 15}$
	Fin Pour
Sortie :	**Afficher** $\boldsymbol{T}$

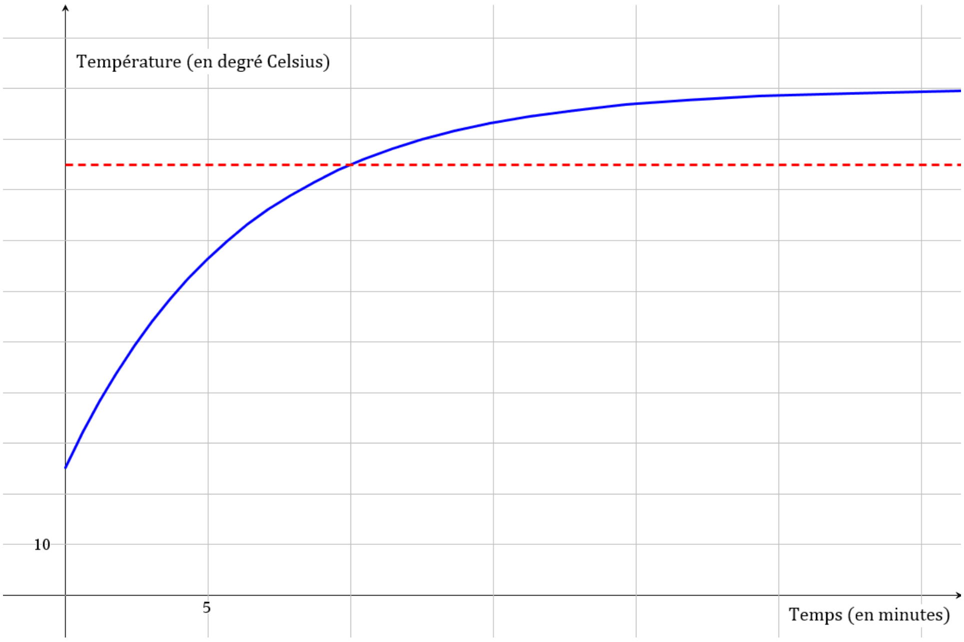
1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3minutes. Arrondir à l'unité.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$.
3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

Partie B :Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.
On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec : $f(t) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}$

1. a. Étudier le sens de variations de f sur $[0; +\infty[$.
   b. Justifier que si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq 85$.
2. Soit μ un réel supérieur ou égal à 10.

On note $A(\mu)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \mu$, $y = 85$ et la courbe représentative C_f.
On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps μ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $A(\mu)$ est supérieure à 80.



a. Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe , que l'on a $A(25) > 80$.
b. Justifier que, pour $\theta \geq 10$, on a

$$A(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t} dt$$

c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

CORRECTION

EXERCICE 5 : **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3minutes. Arrondir à l'unité.

On obtient $\boldsymbol{T_3 = 54}$ à l'unité près.

Ecrivons le programme dans notre TI 83 Premium CE :

Pour entrer le programme appuyons sur dessin C prgm

Puis on choisit l'onglet **NOUVEAU**.

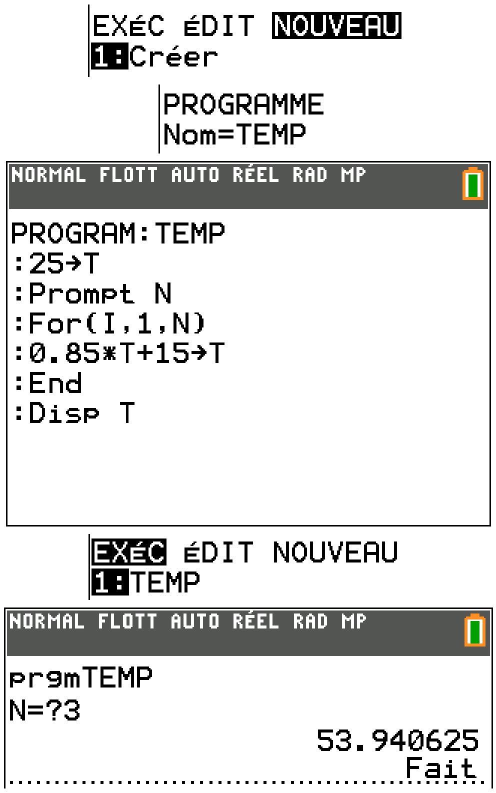
On entre le nom de son programme : **TEMP** (par exemple)

Puis on écrit son programme :

On sort de l'éditeur de programme en appuyant sur 2nde quitter mode

Puis on exécute le programme en appuyant sur dessin C prgm puis on choisit le nom de son programme **TEMP**:

On entre $N = 3$ en on obtient $\boldsymbol{T_3 = 54}$ à l'unité près.



2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $\boldsymbol{T_n = 100 - 75 \times 0,85^n}$.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$:

Initialisation : $T_0 = 25$ s'après l'énoncé et $100 - 75 \times 0{,}85^0 = 100 - 75 = 25$. La proposition est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que la proposition soit vraie au rang $n \in \mathbb{N}$: $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$
Et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire montrons que $T_{n+1} = 100 - 75 \times 0{,}85^{n+1}$

On sait d'après l'algorithme, que $T_{n+1} = 0{,}85T_n + 15$ or d'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 0{,}85(100 - 75 \times 0{,}85^n) + 15 \\ &= 0{,}85 \times 100 - 0{,}85 \times 75 \times 0{,}85^n + 15 \\ &= 85 - 75 \times 0{,}85^{n+1} + 15 \\ &= 100 - 75 \times 0{,}85^{n+1} \end{aligned}$$

La proposition est donc vraie au rang $n + 1$.

<u>Conclusion</u> : On a démontré, d'après le principe de récurrence que

Pour tout $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$: $\boldsymbol{T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n}$

---

3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

La stérilisation débute lorsque $T_n \geq 85 \Leftrightarrow 100 - 75 \times 0{,}85^n \geq 85 \Leftrightarrow 15 \geq 75 \times 0{,}85^n \Leftrightarrow 0{,}85^n \leq \frac{1}{5}$

Le deux membres sont positifs stricts et la fonction ln est croissante sur $]0; +\infty[$ donc $\ln(0{,}85^n) \leq \ln\left(\frac{1}{5}\right)$

d'où $n\ln(0{,}85) \leq -\ln 5 \Leftrightarrow n \geq -\frac{\ln 5}{\ln 0{,}85}$ car $\ln 0{,}85 < 0$.

Or $-\frac{\ln 5}{\ln 0{,}85} \approx 9{,}9$, on doit donc avior $n \geq 10$ pour que la température dépasse 85°C.

Conclusion : **La stérilisation débute à partir de 10 minutes.**

Partie B :Modélisation continue

On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

$$\boldsymbol{f(t) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}}$$

1. a. Étudier le sens de variations de f sur $[0; +\infty[$.

La fonction $t \mapsto -\frac{\ln 5}{10}t$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ car c'est une fonction polynôme, donc la fonction $t \mapsto e^{-\frac{\ln 5}{10}t}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ d'après le cours.

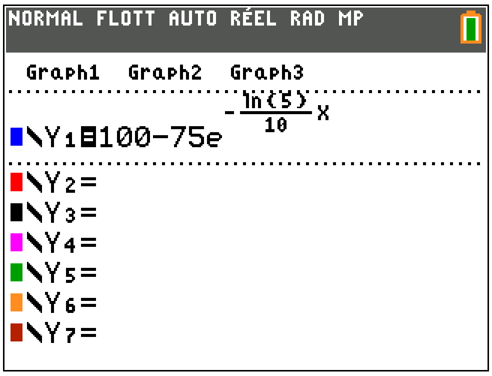
Donc la fonction $t \mapsto -75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et par somme de fonctions dérivables, f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

Pour tout $t \in [0; +\infty[$ $f'(t) = -75 \times \left(-\frac{\ln 5}{10}\right)e^{-\frac{\ln 5}{10}t} \Leftrightarrow f'(t) = \frac{15}{2}\ln 5 \times e^{-\frac{\ln 5}{10}t}$

On a pour tout $t \in [0; +\infty[$ $e^{-\frac{\ln 5}{10}t} > 0$ et $\frac{15}{2}\ln 5 > 0$ donc $f'(t) > 0$.

f est croissante sur $[0; +\infty[$.

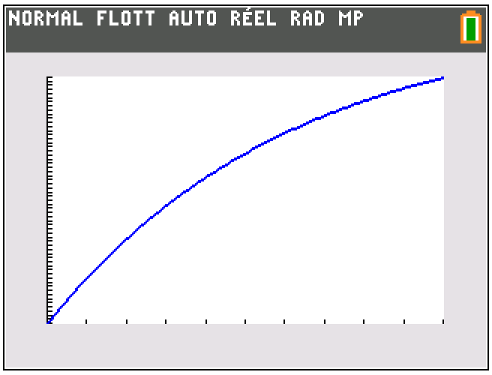
Vérifions nos résultats en représentant graphiquement la fonction f à l'aide de notre TI 83 Premium CE :



Pour entrer la fonction, on appuie sur graph stats f1 **f(x)**

Puis on entre l'ensemble de définition en appuyant sur déf table f2 **fenêtre** (on prend $[0; 10]$ car on ne peut pas entrer $+\infty$ comme borne)

On choisit le zoom automatique en appuyant sur format f3 **zoom** puis **0:AjustZoom**



Cela confirme bien que la fonction f est croissante sur son ensemble de définition.

---

1. b. Justifier que si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq 85$.

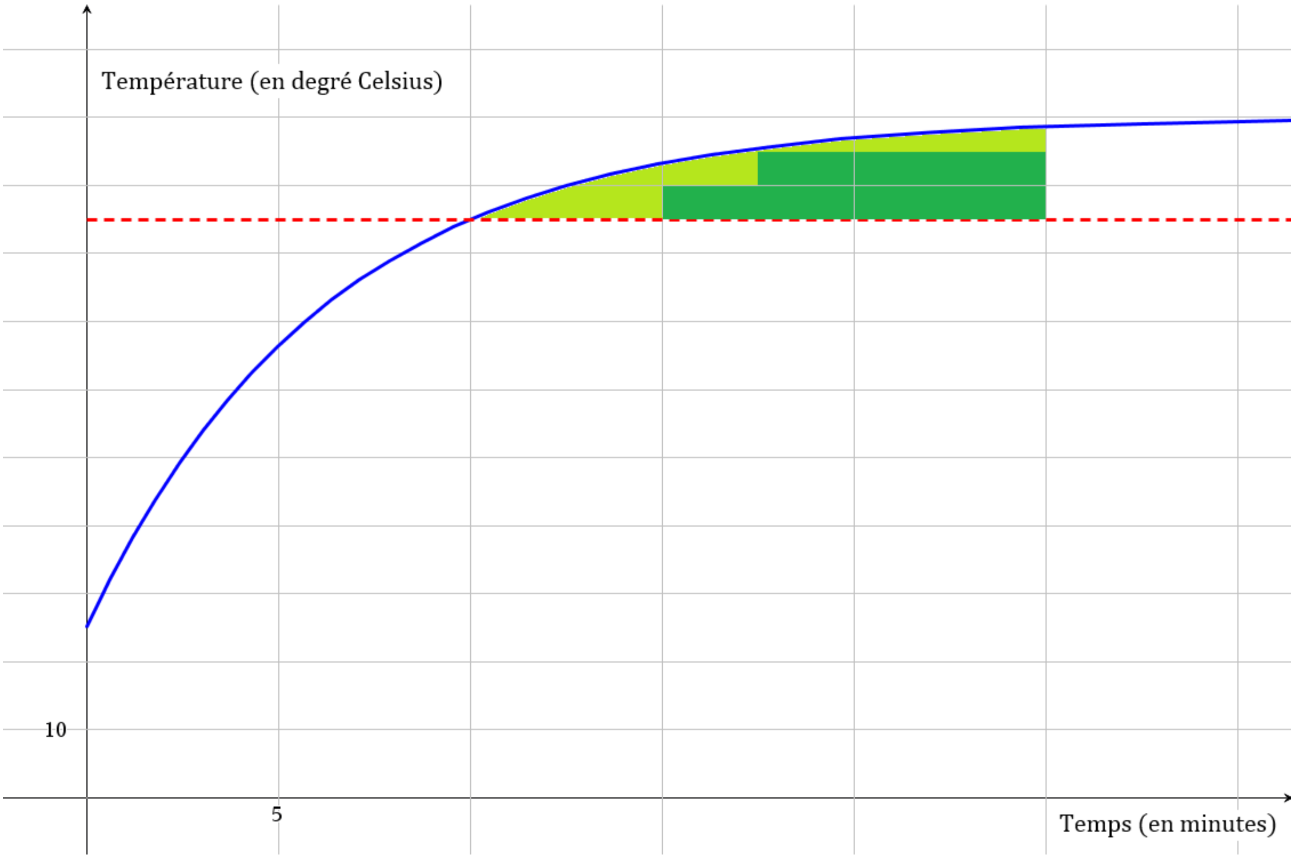
D'après la question précédente, f est croissante sur $[0; +\infty[$ donc si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq f(10)$.

Or $f(10) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}\times 10} = 100 - 75e^{-\ln 5} = 100 - 75 \times \frac{1}{5} = 100 - 15 = 85$.

Conclusion : **si $t \geq 10$ alors $f(t) \geq 85$**.

---

2. a. Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe , que l'on a $A(25) > 80$.



L'aire contient trois rectangle et demi faisant chacun $5 \times 5 = 25\ u.a.$, l'aire est donc plus grande que $3{,}5 \times 25$ soit **87,5 qui est plus grand que 80**.

---

2. b. Justifier que, pour $\theta \geq 10$, on a

$$A(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t} dt$$

$$A(\theta) = \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85)dt = \int_{10}^{\theta} \left(100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t} - 85\right) dt = \int_{10}^{\theta} \left(15 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right) dt$$

$$= \int_{10}^{\theta} (15)dt - \int_{10}^{\theta} \left(75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right) dt = [15t]_{10}^{\theta} - \int_{10}^{\theta} 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t} dt = 15\theta - 15 \times 10 - 75 \int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t} dt$$

Donc $A(\theta) = 15(\theta - 10) + 75 \int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t} dt$

---

2. c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

On a

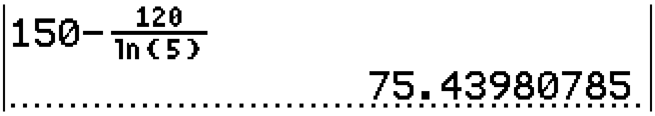
$$A(20) = 15(20-10) + 75\left(-\frac{10}{\ln 5}\right)\int_{10}^{20}\left(-\frac{\ln 5}{10}\times e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right)dt$$

On reconnait une forme du type $u'e^u$ avec $u(t) = -\frac{\ln 5}{10}t$ et $u'(t) = -\frac{\ln 5}{10}$.

D'où $A(20) = 150 + 75\left(-\frac{10}{\ln 5}\right)\left[e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right]_{10}^{20} = 150 + 75\left(-\frac{10}{\ln 5}\right)\left(e^{-\frac{\ln 5}{10}\times 20} - e^{-\frac{\ln 5}{10}\times 10}\right)$

$$A(20) = 150 + 75\left(-\frac{10}{\ln 5}\right)\left(e^{-\ln 5\times 2} - e^{-\ln 5}\right) = 150 + 75\left(-\frac{10}{\ln 5}\right)\left(\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}\right) = 150 - \frac{120}{\ln 5}$$

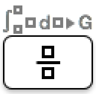
On obtient :

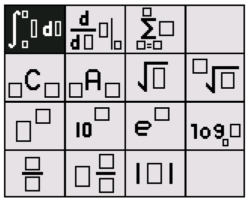


Donc $A(20)$ n'est pas supérieur à 80. Conclusion : **La stérilisation n'est pas finie au bout de 20 minutes.**

On peut vérifier notre calcul intégral à l'aide de la TI83 Premium CE :

Pour cela on appuie sur 





Puis on entre l'expression à calculer.
Etant donné qu'on a déjà entrer l'expression de la fonction dans Y_1 on va le réutiliser.

Pour afficher Y_1 on appuie sur 

puis on complète les champs.

On obtient bien le même résultat, ce qui confirme notre calcul.