EXERCICE 1 **7 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une boite contient 200 médailles souvenir dont 50 sont argentées, les autres dorées.
Parmi les argentées 60% représentent le château de Blois, 30% le château de Langeais, les autres le château de Saumur.

Parmi les dorées 40% représentent le château de Blois, les autres le château de Langeais.
On tire au hasard une médaille de la boite. Le tirage est considéré équiprobable et on note :

A l'évènement « la médaille tirée est argentée » ;
D l'évènement « la médaille tirée est dorée » ;
B l'évènement « la médaille tirée représente le château de Blois » ;
L l'évènement « la médaille tirée représente le château de Langeais » ;
S l'évènement « la médaille tirée représente le château de Saumur ».

1. Dans cette question, on donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.
   a. Calculer la probabilité que la médaille tirée soit argentée et représente le château de Langeais.
   b. Montrer que la probabilité que la médaille tirée représente le château de Langeais est égale à $\frac{21}{40}$.
   c. Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, quelle est la probabilité que celle-ci soit dorée ?

2. Sachant que la médaille tirée représente le château de Saumur, donner la probabilité que celle-ci soit argentée.

Partie B

Une médaille est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre 9,9 et 10,1 grammes.
On dispose de deux machines M_1 et M_2 pour produire les médailles.

1. Après plusieurs séries de tests, on estime qu'une machine M_1 produit des médailles dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,06.

   On note C l'évènement « la médaille est conforme ».
   Calculer la probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 ne soit pas conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} près.

2. La proportion des médailles non conformes produites par la machine M_1 étant jugée trop importante, on utilise une machine M_2 qui produit des médailles dont la masse Y en grammes suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type σ.
   a. Soit Z la variable aléatoire égale à $\frac{Y-10}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par la variable Z ?
   b. Sachant que cette machine produit 6% de pièces non conformes, déterminer la valeur arrondie au millième de σ.

CORRECTION

Partie A

1. a. Calculer la probabilité que la médaille tirée soit argentée et représente le château de Langeais.

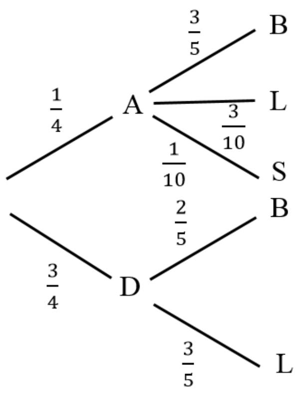
Dans cette partie A, il y a deux façons de traiter l'exercice.
La façon classique en construisant un **arbre représentant la situation (colonne de gauche)**
Mais on pouvait faire aussi un **tableau** : en effet on connaissait ici le nombre total de pièces. Ce qui nous permet de connaitre la quantité de chaque pièce… (**colonne de droite**)

D'après l'énoncé :
50 médailles sont argentées donc $p(A) = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$
Les autres médailles étant dorées on a $p(D) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$.

« Parmi les argentées 60% représentent le château de Blois » ainsi $p_A(B) = 0{,}6 = \frac{3}{5}$
« 30% le château de Langeais » soit $p_A(L) = 0{,}3 = \frac{3}{10}$ et « les autres le château de Saumur » donc
$p_A(S) = 1 - 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}1 = \frac{1}{10}$.

« Parmi les dorées 40% représentent le château de Blois » ce qui nous donne $p_D\,(B) = 0{,}4 = \frac{2}{5}$ et « les autres le château de Langeais » soit
$p_D\,(L) = 0{,}6 = \frac{3}{5}$.

Ce qui nous permet de construire l'arbre suivant :



Ainsi $p(A \cap L) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{4}$ d'après l'arbre
donc $\boldsymbol{p(A \cap L) = \frac{3}{40}}$

Il y a 50 médailles argentées dont 60% représentent le château de Blois soit $50 \times \frac{60}{100} = 30$
De plus 30% représentent le château de Langeais soit
$50 \times \frac{30}{100} = 15$ médailles.
Les autres représentent le château de Saumur soit $50 - 30 - 15 = 5$ médailles.

De plus parmi les 150 médailles dorées il y en a 40%
qui représentent le château de Blois cela en fait $150 \times \frac{40}{100} = 60$ médailles.
On sait que les autres représentent le château de Langeais ce qui en fait $150 - 60 = 90$ médailles.

D'où le tableau :

	Blois	Langeais	Saumur	Total
Médailles argentées	30	15	5	50
Médailles dorées	60	90	0	150
Total	90	105	5	200

D'après le tableau il y a 15 médailles argentées représentant Langeais, ainsi $p(A \cap L) = \frac{15}{200}$
Ce qui nous donne $\boldsymbol{p(A \cap L) = \frac{3}{40}}$

1. b. Montrer que la probabilité que la médaille tirée représente le château de Langeais est égale à $\frac{21}{40}$.

On a d'après l'arbre :
$p(L) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{40} + \frac{9}{20}$ donc $\boldsymbol{p(L) = \frac{21}{40}}$.

Il y a 105 médailles de Langeais ainsi
$p(L) = \frac{105}{200}$ donc $\boldsymbol{p(L) = \frac{21}{40}}$.

$\frac{105}{200}$ $\frac{21}{40}$

On écrit la fraction à l'aide de la touche

1. c. Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, quelle est la probabilité que celle-ci soit dorée ?

On a d'après le cours $p_L(D) = \frac{p(L \cap D)}{p(L)}$

D'après l'arbre $p(L \cap D) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$

D'où $p_L(D) = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{21}{40}} = \frac{9}{20} \times \frac{40}{21}$

$\frac{\frac{9}{20}}{\frac{21}{40}}$ $\frac{6}{7}$

Ainsi $p_L(D) = \frac{6}{7}$

D'après le tableau on a :

	Blois	Langeais	Saumur	Total
Médailles argentées	30	15	5	50
Médailles dorées	60	90	0	150
Total	90	105	5	200

$p_L(D) = \frac{90}{105}$

$\frac{90}{105}$ $\frac{6}{7}$

soit $\boldsymbol{p_L(D) = \frac{6}{7}}$

2. Sachant que la médaille tirée représente le château de Saumur, donner la probabilité que celle-ci soit argentée.

On a d'après le cours $p_S(A) = \frac{p(S \cap A)}{p(S)}$

D'après l'arbre $p(S \cap A) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$ et d'après l'arbre on a $p(S) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$

D'où $p_S(A) = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{9}{20}}$ soit $\boldsymbol{p_S(A) = 1}$

D'après le tableau on a :

	Blois	Langeais	Saumur	Total
Médailles argentées	30	15	5	50
Médailles dorées	60	90	0	150
Total	90	105	5	200

$p_S(A) = \frac{5}{5} = 1$ donc $\boldsymbol{p_S(A) = 1}$.

Partie B

1. Après plusieurs séries de tests, on estime qu'une machine M_1 produit des médailles dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,06.
On note C l'évènement « la médaille est conforme ».
Calculer la probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 ne soit pas conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} près.

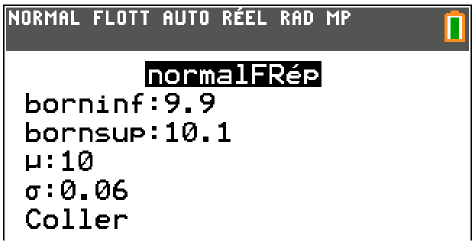
Retrouvez la séquence ci-dessous en vidéo ! :
https://youtu.be/948r3LVjfIg

On demande de calculer $p(\overline{C}) = 1 - p(C) = 1 - p(9{,}9 \leq X \leq 10{,}1)$

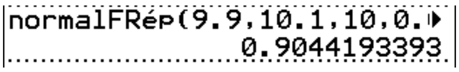
On va utiliser la TI83 Premium pour faire ce calcul :

On appuie sur 2nde var (distrib) puis on choisit **normalFRép(**

On complète la boite de dialogue :
La moyenne est de $\mu = 10$
et l'écart type de $\sigma = 0{,}06$:



On obtient ainsi $p(9{,}9 \leq X \leq 10{,}1) = 0{,}904$ à 10^{-3} près.



Conclusion : $p(\overline{C}) = 1 - 0{,}904$
soit $\boldsymbol{p(\overline{C}) = 0{,}096}$ à 10^{-3} près.

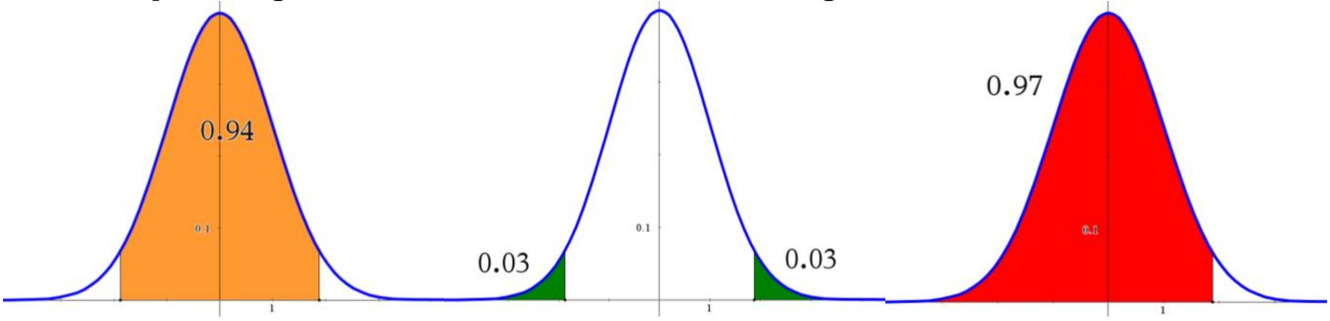
2. La proportion des médailles non conformes produites par la machine M_1 étant jugée trop importante, on utilise une machine M_2 qui produit des médailles dont la masse Y en grammes suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type σ.
a. Soit Z la variable aléatoire égale à $\frac{Y-10}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par la variable Z ?

Y suit un loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type σ. Donc d'après le cours, $\boldsymbol{Z = \frac{Y-10}{\sigma}}$ **suit une loi normale centrée réduite.**

2. b. Sachant que cette machine produit 6% de pièces non conformes, déterminer la valeur arrondie au millième de σ.

On sait dans cette question que $p(9{,}9 \leq Y \leq 10{,}1) = 0{,}94$ (0,94 est le complément à 1 de 0,06).
D'où $p(9{,}9 - 10 \leq Y - 10 \leq 10{,}1 - 10) = 0{,}94$
$\Leftrightarrow p(-0{,}1 \leq Y - 10 \leq 0{,}1) = 0{,}94$
$\Leftrightarrow p\left(-\frac{0{,}1}{\sigma} \leq \frac{Y-10}{\sigma} \leq \frac{0{,}1}{\sigma}\right) = 0{,}94$
$\Leftrightarrow p\left(-\frac{0{,}1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{0{,}1}{\sigma}\right) = 0{,}94$

A l'aide de petites figures on en déduit la valeur de l'aire rouge :



Retrouvez la séquence ci-dessous en vidéo ! :
https://youtu.be/j9m3-m1ilzw

On recherche donc σ tel que $p\left(Z \leq \frac{0{,}1}{\sigma}\right) = 0{,}97$

On va utiliser la loi normale inverse :

On appuie sur 2nde var (distrib) puis on choisit **FracNormale(**

On complète la boite de dialogue :

D'où $\frac{0{,}1}{\sigma} = 1{,}88079$

On en déduit que $\sigma = \frac{0{,}1}{1{,}88079}$
soit $\boldsymbol{\sigma = 0{,}053}$ à 10^{-3} près.