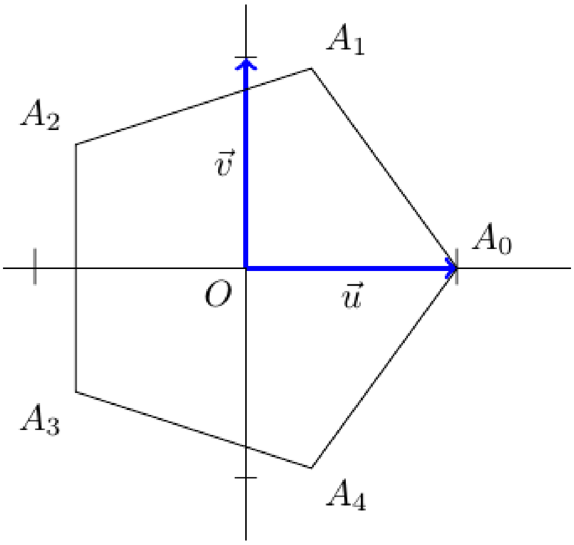
EXERCICE 2 : **3 points**
Commun à tous les candidats

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.



Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, de centre O tel que
On rappelle que dans le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, ci-contre :

- les cinq côtés sont de même longueur ;
- les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 appartiennent au cercle trigonométrique;
- pour tout entier k appartenant à {0 ; 1 ; 2 ; 3} on a $\left(\overrightarrow{OA_k}; \overrightarrow{OA_{k+1}}\right) = \frac{2\pi}{5}$.

1. On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\frac{i}{2}$.
   Le cercle (C) de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$ coupe le segment $[BJ]$ en un point K.
   Calculer BJ, puis en déduire BK.
2. a. Donner sous forme exponentielle l'affixe du point A_2. Justifier brièvement.
   b. Démontrer que $BA_2{}^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$
   c. Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification :
   En déduire, grâce à ces résultats, que $\mathrm{BA}_2 = \mathrm{BK}$.

Calcul formel

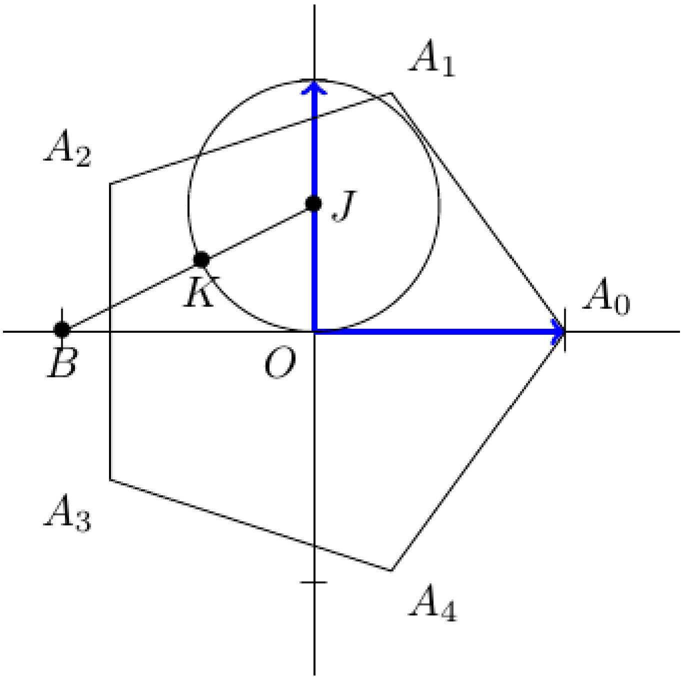
cos(4· pi/5)	$\frac{1}{4}\cdot\left(-\sqrt{5}-1\right)$
sqrt((3–sqrt(5))/2)	$\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)$

« sqrt »signifie « racine carrée »

3. Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ donné en annexe, construire à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.

CORRECTION

1. On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\frac{i}{2}$.
Le cercle (C) de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$ coupe le segment $[BJ]$ en un point K.
Calculer BJ, puis en déduire BK.



Le triangle BOJ est rectangle en O donc $BJ^2 = BO^2 + OJ^2 \Leftrightarrow BJ^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow BJ^2 = \frac{5}{4}$.

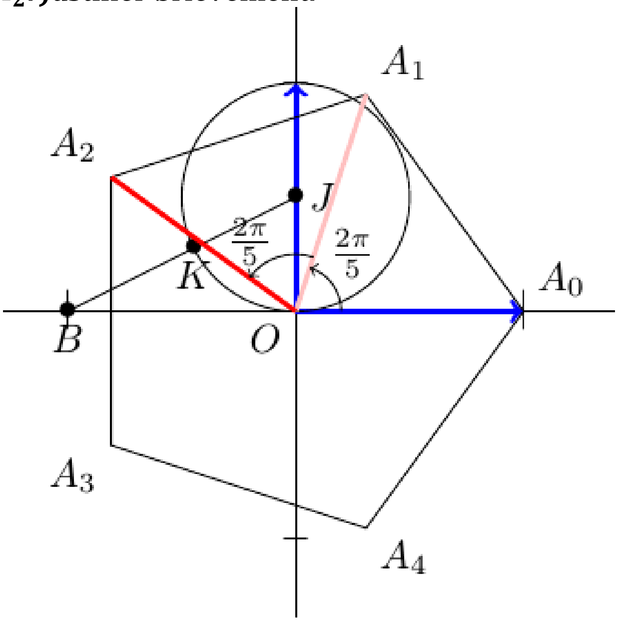
Ce qui prouve que $\boldsymbol{BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}}$.

D'autre part K appartient au cercle de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$ donc $JK = \frac{1}{2}$. K étant sur le segment $[BJ]$ on en déduit que

$$BK = BJ - JK \Leftrightarrow BK = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{BK = \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

---

2. a. Donner sous forme exponentielle l'affixe du point A_2. Justifier brièvement.



Le pentagone $A_0A_1A_2A_3A_4$ est régulier donc $\left(\overrightarrow{OA_0};\overrightarrow{OA_1}\right) = \frac{2\pi}{5}$ et $\left(\overrightarrow{OA_1};\overrightarrow{OA_2}\right) = \frac{2\pi}{5}$
d'où $\left(\overrightarrow{OA_0};\overrightarrow{OA_2}\right) = \frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}$
soit $\left(\overrightarrow{OA_0};\overrightarrow{OA_2}\right) = \frac{4\pi}{5} \Leftrightarrow \left(\vec{u};\overrightarrow{OA_2}\right) = \frac{4\pi}{5}$

On a aussi $OA_2 = 1$.

Soit $A_2(z_2)$ avec $z_2 \in \mathbb{C}$. $\left(\vec{u};\overrightarrow{OA_2}\right) = \frac{4\pi}{5} \Leftrightarrow Arg(z_2) = \frac{4\pi}{5}$ et $OA_2 = 1 \Leftrightarrow |z_2| = 1$.

D'où $z_2 = 1 \times e^{i\frac{4\pi}{5}} \Leftrightarrow \boldsymbol{z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}}$

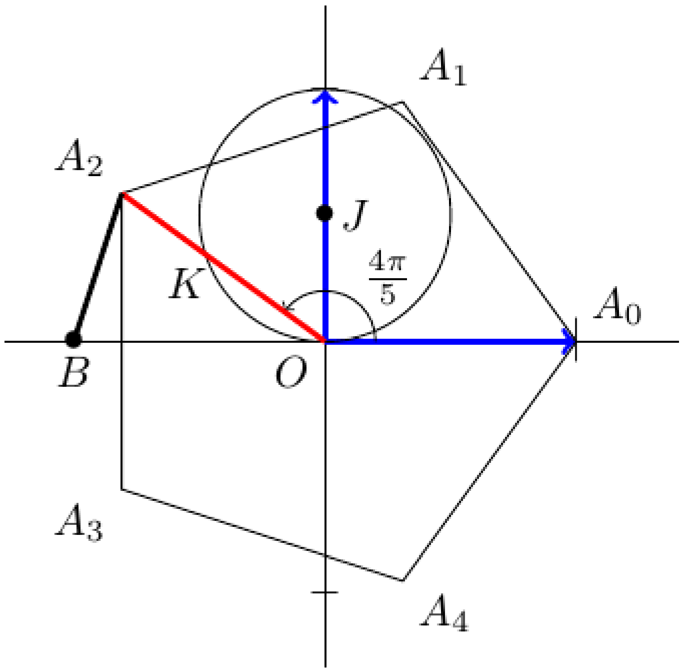
---

2. b. Démontrer que $BA_2{}^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

On a $B(-1)$ et $A_2\left(e^{i\frac{4\pi}{5}}\right)$

$$\begin{aligned} BA_2 &= \left|e^{i\frac{4\pi}{5}} - (-1)\right| = \left|e^{i\frac{4\pi}{5}} + 1\right| \\ &= \left|\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\ \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1\right| \\ &= \left|1 + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\ \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right| \\ &= \sqrt{\left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)} \\ &= \sqrt{1 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)} \\ &= \sqrt{1 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1} \\ &= \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)} \end{aligned}$$

Donc $\boldsymbol{BA_2{}^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}$



2. c. Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification :
En déduire, grâce à ces résultats, que $BA_2 = BK$.

Calcul formel

cos(4· pi/5)	$\frac{1}{4}\cdot(-\sqrt{5}-1)$
sqrt((3−sqrt(5))/2)	$\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)$

« sqrt »signifie « racine carrée »

On sait d'après 2.b que $BA_2{}^2 = 2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ donc $BA_2 = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}$

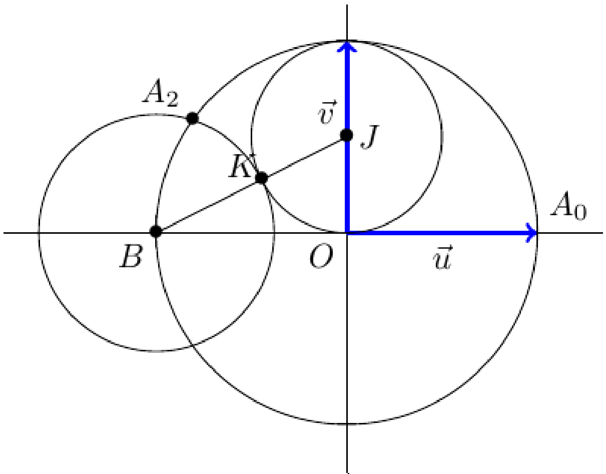
D'après le logiciel de calcul formel on a : $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}(-\sqrt{5} - 1)$.
Ainsi $2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2 + 2\left(\frac{1}{4}(-\sqrt{5} - 1)\right) = 2 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Et d'après les résultats du logiciel de calcul formel on a : $\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

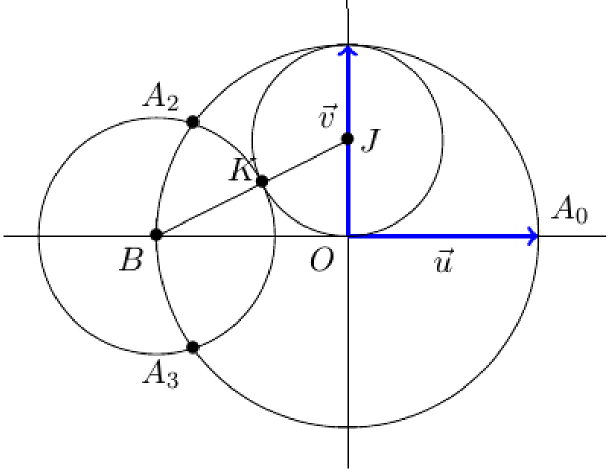
Ce qui prouve que $\boldsymbol{BA_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)}$. Or d'après 1. $BK = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ce qui prouve que $\boldsymbol{BA_2 = BK}$.

3. Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ donné en annexe, construire à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.

A_2 appartient au cercle de centre O et de rayon 1.
D'autre part on a démontré au 2.c. que $BA_2 = BK$. Donc A_2 appartient au cercle de centre B et de rayon BK.



$(\overrightarrow{OA_0}; \overrightarrow{OA_3}) = \frac{6\pi}{5}\ (2\pi)$ donc
$(\overrightarrow{OA_0}; \overrightarrow{OA_3}) = -\frac{4\pi}{5}\ (2\pi)$.
Ainsi A_3 est le symétrique de A_2 par rapport à l'axe des abscisses.



Le pentagone $A_0A_1A_2A_3A_4$ est régulier donc $A_2A_3 = A_3A_4$ et $A_2A_3 = A_2A_1$, il suffit de reporter la longueur A_2A_3 :