TI 图形计算器代数功能在圆锥曲线中的应用

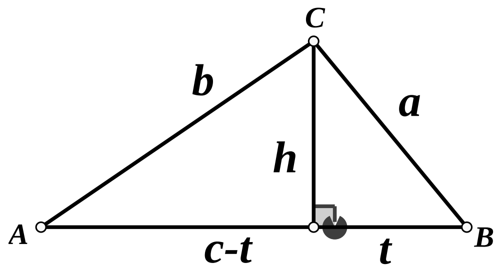
北京宏志中学　　　徐德前

圆锥曲线是高中平面几何中的重要内容，融合了代数、三角、不等式、导数和几何等知识，圆锥曲线的题型主要有轨迹问题、定点定值问题、最值问题以及导数、不等式结合的问题等等.解题时涉及到较深入的数学思想方法及较高的解题技巧，这些利用 TI 图形计算器的逻辑、解方程、不等式、导数求最值（极值）以及抽象的符号运算. TI-*nSpire* CX CAS 图形计算器内置了强大的 CAS 功能.

本文尝试利用 TI 图形计算器的代数功能解决圆锥曲线中的一些问题.

引例　（为减少阅读量，后续例子没有写出一般意义上的解法）

三角形面积公式（海伦公式）$s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.



证明思路：

1、由题意知 $s^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$，把 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ 带入，只需要证明

$$s^2=\frac{-(a+b+c)(a+b-c)(a-b-c)(a-b+c)}{16}$$

2、如图 $h^2=a^2-t^2$，同时 $h^2=b^2-(c-t)^2$，解方程 $a^2-t^2=b^2-(c-t)^2$ 得

$t=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2c}$，所以 $h^2=a^2-t^2=\dfrac{-(a+b+c)(a+b-c)(a-b-c)(a-b+c)}{4c^2}$

3、另一方面 $s=\dfrac{ch}{2}$，所以 $s^2=\dfrac{c^2h^2}{4}=\dfrac{-(a+b+c)(a+b-c)(a-b-c)(a-b+c)}{16}$

4、命题得证.

对比人工计算和利用 CAS 功能的解题过程，可以发现 CAS 具有的良好的输入输出界面，解题步骤和人工手算基本一致,应用自然，符合做题习惯.

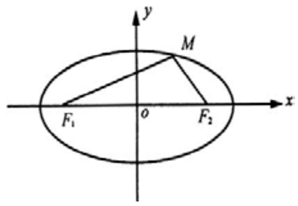
用 TI-*nSpire* CX CAS 图形计算器的 CAS 功能解题步骤如下：

$p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\mid p=\frac{a+b+c}{2}$	$\frac{-(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b-c)\cdot(a-b+c)}{16}$
$\mathrm{solve}\left(a^2-t^2=b^2-(c-t)^2,t\right)$	$t=\frac{a^2-b^2+c^2}{2\cdot c}$
$a^2-t^2\mid t=\frac{a^2-b^2+c^2}{2\cdot c}\to hh$	$\frac{-\left(a^4-2\cdot a^2\cdot(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2\right)}{4\cdot c^2}$
$\mathrm{factor}(hh)$	$\frac{-(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b-c)\cdot(a-b+c)}{4\cdot c^2}$
$\frac{c^2\cdot hh}{4}\to ss$	$\frac{-\left(a^4-2\cdot a^2\cdot(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2\right)}{16}$
$\mathrm{factor}(ss)$	$\frac{-(a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b-c)\cdot(a-b+c)}{16}$

6/99

例 1 标准椭圆方程的推导

平面内，到两个定点 F_1、 F_2 的距离之和等于常数（大于 $|F_1F_2|$ ）的点的轨迹叫做椭圆．这两个定点 F_1、F_2 叫做椭圆的焦点，两焦点间的距离叫做椭圆的焦距.



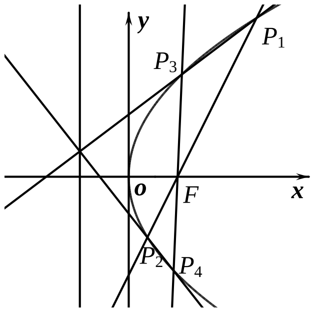
解：

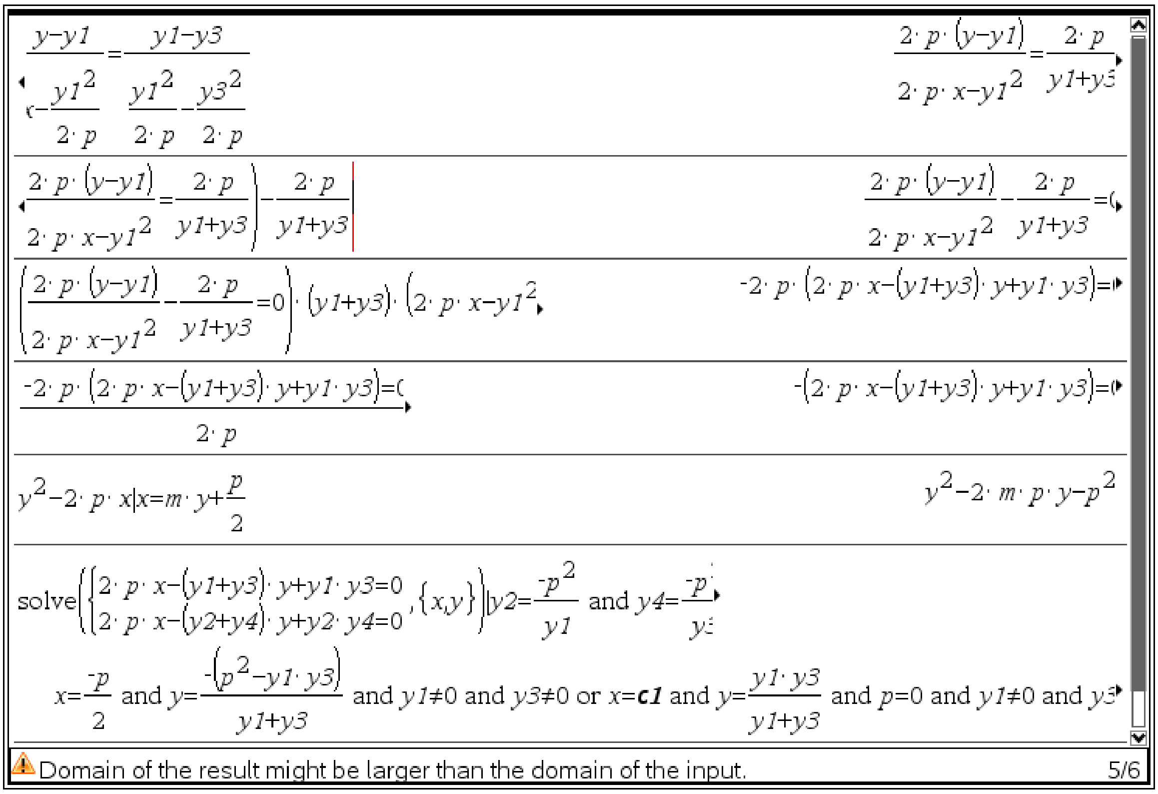
$[-c\ \ 0] \to f1$	$[-c\ \ 0]$
$[c\ \ 0] \to f2$	$[c\ \ 0]$
$[x\ \ y] \to m$	$[x\ \ y]$
$\mathrm{norm}(f1-m)$	$\sqrt{x^2+2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}$
$\mathrm{norm}(f2-m)$	$\sqrt{x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}$
$\sqrt{x^2+2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}+\sqrt{x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}=2\cdot a$	$\sqrt{x^2+2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}+\sqrt{x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}=2\cdot a$
$\sqrt{x^2+2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}=2\cdot a-\sqrt{x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2} \to eq$	$\sqrt{x^2+2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}=2\cdot a-\sqrt{x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}$
$\mathrm{expand}(eq^2)$	$x^2+2\cdot c\cdot x+y^2+c^2=-4\cdot a\cdot \sqrt{x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}+x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+4\cdot a^2+c^2$
$\left(x^2+2\cdot c\cdot x+y^2+c^2=-4\cdot a\cdot \sqrt{x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}+x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+4\cdot a^2+c^2\right)-\left(x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+4\cdot a^2+c^2\right) \to eq$	$4\cdot c\cdot x-4\cdot a^2=-4\cdot a\cdot \sqrt{x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}$
$\mathrm{expand}(eq^2) \to eq$	$16\cdot c^2\cdot x^2-32\cdot a^2\cdot c\cdot x+16\cdot a^4=16\cdot a^2\cdot x^2-32\cdot a^2\cdot c\cdot x+16\cdot a^2\cdot y^2+16\cdot a^2\cdot c^2$
$\mathrm{expand}(eq-\mathrm{right}(eq))$	$-16\cdot a^2\cdot x^2+16\cdot c^2\cdot x^2-16\cdot a^2\cdot y^2+16\cdot a^4-16\cdot a^2\cdot c^2=0$
$\dfrac{\mathrm{expand}(eq-\mathrm{right}(eq))}{16}$	$-\left(\left(a^2-c^2\right)\cdot x^2+a^2\cdot\left(y^2-a^2+c^2\right)\right)=0$

9/12

例 2 过抛物线的焦点 F 引两条弦 P_1P_2 和 P_3P_4，证明：P_1P_3 和 P_2P_4 相交于准线上.

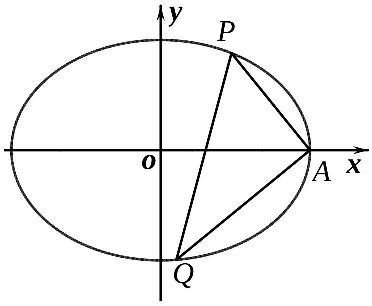
证明：





拓展：若把点 F 改为普通的点 $F'(m,0)$，不难得到 P_1P_3 和 P_2P_4 相交于直线 $x=-m$.

例 3　求证：以椭圆长轴端点为直角顶点的内接直角三角形，它的斜边过定点.



证明：

$$\text{solve}\left(\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ y=k\cdot(x-a)\end{cases},\{x,y\}\right)$$

$$x=\frac{a\cdot(a^2\cdot k^2-b^2)}{a^2\cdot k^2+b^2} \text{ and } y=\frac{-2\cdot a\cdot b^2\cdot k}{a^2\cdot k^2+b^2} \text{ and } a\neq0 \text{ and } b\neq0 \text{ or } x=a \text{ and } y=0 \text{ and } a\neq0 \text{ and } b\neq ▸$$

$$\frac{a\cdot(a^2\cdot k^2-b^2)}{a^2\cdot k^2+b^2}\to xp \qquad \frac{a\cdot(a^2\cdot k^2-b^2)}{a^2\cdot k^2+b^2}$$

$$\frac{-2\cdot a\cdot b^2\cdot k}{a^2\cdot k^2+b^2}\to yp \qquad \frac{-2\cdot a\cdot b^2\cdot k}{a^2\cdot k^2+b^2}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ y=\dfrac{-1}{k}\cdot(x-a)\end{cases},\{x,y\}▸\right.$$

$$x=\frac{a\cdot(a^2-b^2\cdot k^2)}{\ldots} \text{ and } y=\frac{2\cdot a\cdot b^2\cdot k}{\ldots} \text{ and } a\neq0 \text{ and } b\neq0 \text{ and } k\neq0 \text{ or } x=a \text{ and } y=0 \text{ and } a\neq0 \text{ and } b\neq0▸$$

5/7

$$\frac{-2\cdot a\cdot b^{2}\cdot k}{a^{2}\cdot k^{2}+b^{2}}\to yp \qquad \frac{-2\cdot a\cdot b^{2}\cdot k}{a^{2}\cdot k^{2}+b^{2}}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases}\dfrac{x^{2}}{a^{2}}+\dfrac{y^{2}}{b^{2}}=1\\ y=\dfrac{-1}{k}\cdot(x-a)\end{cases},\{x,y\}\right)$$

$$x=\frac{a\cdot\left(a^{2}-b^{2}\cdot k^{2}\right)}{a^{2}+b^{2}\cdot k^{2}}\text{ and }y=\frac{2\cdot a\cdot b^{2}\cdot k}{a^{2}+b^{2}\cdot k^{2}}\text{ and }a\neq0\text{ and }b\neq0\text{ and }k\neq0\text{ or }x=a\text{ and }y=0\text{ and }a\neq0\text{ and }b\neq0$$

$$\frac{a\cdot\left(a^{2}-b^{2}\cdot k^{2}\right)}{a^{2}+b^{2}\cdot k^{2}}\to xq \qquad \frac{a\cdot\left(a^{2}-b^{2}\cdot k^{2}\right)}{a^{2}+b^{2}\cdot k^{2}}$$

$$\frac{2\cdot a\cdot b^{2}\cdot k}{a^{2}+b^{2}\cdot k^{2}}\to yq \qquad \frac{2\cdot a\cdot b^{2}\cdot k}{a^{2}+b^{2}\cdot k^{2}}$$

$$\text{solve}\left(y-yp=\frac{yq-yp}{xq-xp}\cdot(x-xp),x\right)|y=0 \qquad x=\frac{a\cdot\left(a^{2}-b^{2}\right)}{a^{2}+b^{2}}$$

2/7

例 4 （2011 年北京高考理科第 19 题）

已知椭圆$G:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. 过点$(m,0)$作圆$x^2+y^2=1$的切线l交椭圆G于A，B两点.

（I）求椭圆G的焦点坐标和离心率；

（II）将$|AB|$表示为m的函数，并求$|AB|$的最大值.

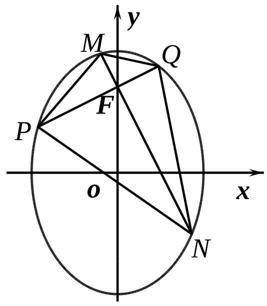
解：

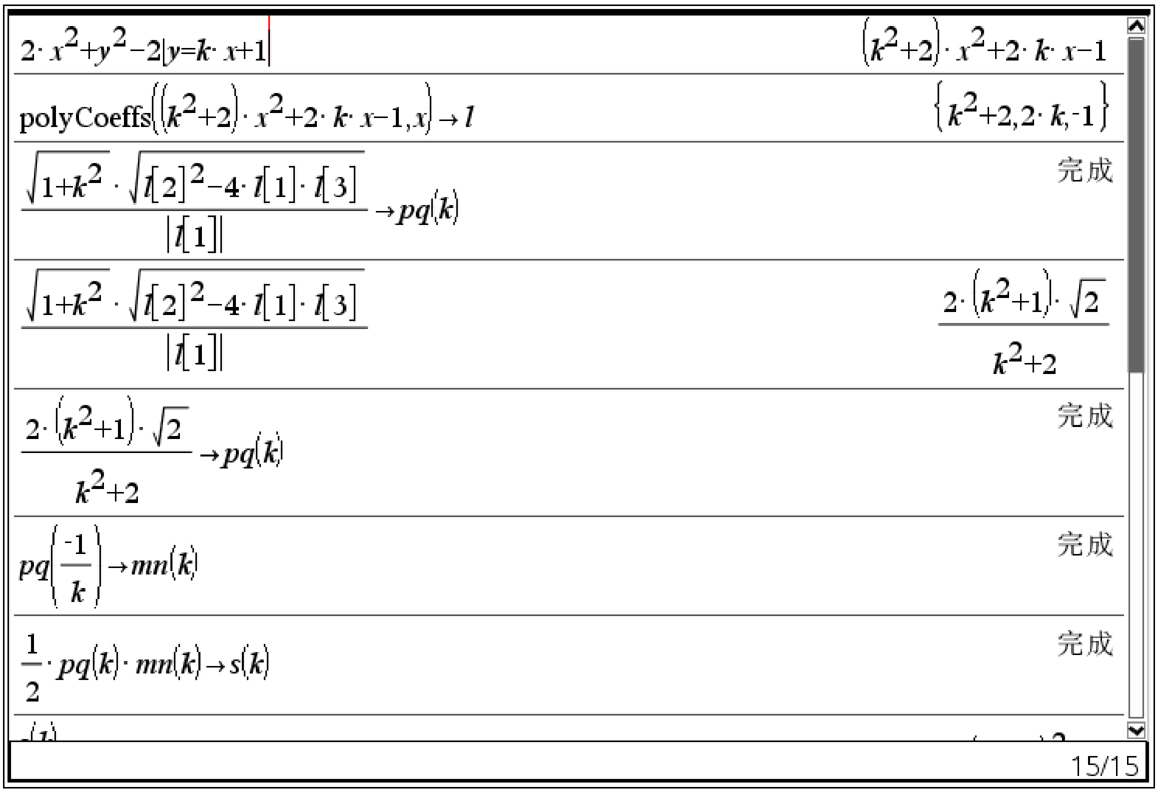
$x^2+4\cdot y^2-4\|y=k\cdot(x-m)$	$(4\cdot k^2+1)\cdot x^2-8\cdot k^2\cdot m\cdot x+4\cdot k^2\cdot m^2-4$
polyCoeffs$((4\cdot k^2+1)\cdot x^2-8\cdot k^2\cdot m\cdot x+4\cdot k^2\cdot m^2-4,x)$	$\{4\cdot k^2+1,-8\cdot k^2\cdot m,4\cdot(k^2\cdot m^2-1)\}$
$\{4\cdot k^2+1,-8\cdot k^2\cdot m,4\cdot(k^2\cdot m^2-1)\}\to l$	$\{4\cdot k^2+1,-8\cdot k^2\cdot m,4\cdot(k^2\cdot m^2-1)\}$
$\dfrac{\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{l[2]^2-4\cdot l[1]\cdot l[3]}}{l[1]}\to f(m)$	*Done*
$f(m)$	$\dfrac{4\cdot\sqrt{-(k^2+1)\cdot(k^2\cdot(m^2-4)-1)}}{4\cdot k^2+1}$
$f(m)\|k^2=\dfrac{1}{m^2-1}$ and $m^2>1$	$\dfrac{4\cdot\|m\|\cdot\sqrt{3}}{m^2+3}$
$\dfrac{4\cdot\|m\|\cdot\sqrt{3}}{m^2+3}\|m>0\to g(m)$	*Done*
fMax$(g(m),m)$	$m=\sqrt{3}$
$g(\sqrt{3})$	2

1/9

例 5　如图，点 P 、 Q 、 M 、 N 在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 上， F 为椭圆的焦点. 已知 $\overrightarrow{PF}$ 与 $\overrightarrow{PQ}$ 共线， $\overrightarrow{MF}$ 与 $\overrightarrow{MN}$ 共线，且 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MF}=0$. 求四边形 $PMQN$ 的面积最小值、最大值.

解





$2\cdot x^2+y^2-2|y=k\cdot x+1$ 　　$(k^2+2)\cdot x^2+2\cdot k\cdot x-1$

$\text{polyCoeffs}((k^2+2)\cdot x^2+2\cdot k\cdot x-1,x)\to l$ 　　$\{k^2+2,2\cdot k,-1\}$

$\frac{\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{l[2]^2-4\cdot l[1]\cdot l[3]}}{|l[1]|}\to pq(k)$ 　　完成

$\frac{\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{l[2]^2-4\cdot l[1]\cdot l[3]}}{|l[1]|}$ 　　$\frac{2\cdot(k^2+1)\cdot\sqrt{2}}{k^2+2}$

$\frac{2\cdot(k^2+1)\cdot\sqrt{2}}{k^2+2}\to pq(k)$ 　　完成

$pq\left(\frac{-1}{k}\right)\to mn(k)$ 　　完成

$\frac{1}{2}\cdot pq(k)\cdot mn(k)\to s(k)$ 　　完成

15/15

$s(k)$	$\dfrac{4\cdot\left(k^2+1\right)^2}{\left(k^2+2\right)\cdot\left(2\cdot k^2+1\right)}$
$\dfrac{4\cdot\left(k^2+1\right)^2}{\left(k^2+2\right)\cdot\left(2\cdot k^2+1\right)}\to t(k)$	完成
$\dfrac{d}{dk}\left(t(k)\right)$	$\dfrac{8\cdot k\cdot\left(k^2-1\right)\cdot\left(k^2+1\right)}{\left(k^2+2\right)^2\cdot\left(2\cdot k^2+1\right)^2}$
$\operatorname{solve}\left(\dfrac{d}{dk}\left(t(k)\right)=0,k\right)$	$k=^{-}1$ or $k=0$ or $k=1$
$t(0)$	2
$t(1)$	$\dfrac{16}{9}$
$t(^{-}1)$	16

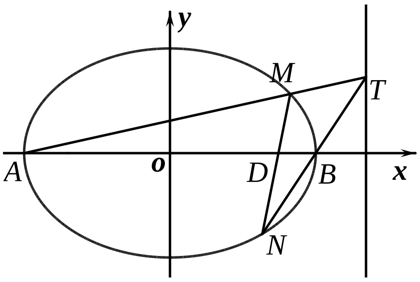
1/14

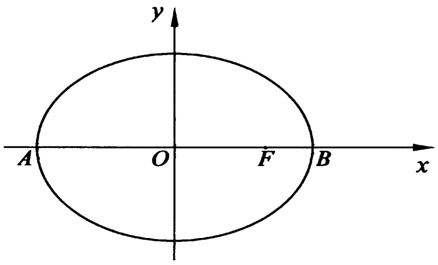
例 6　（2010 年江苏高考试题第 18 题）在平面直角坐标系 xoy 中，如图，已知椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左右顶点为 A、B，右顶点为 F，设过点 $T(t,m)$ 的直线 TA,TB 与椭圆分别交于点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，其中 $m>0$，$y_1>0,y_2<0$.

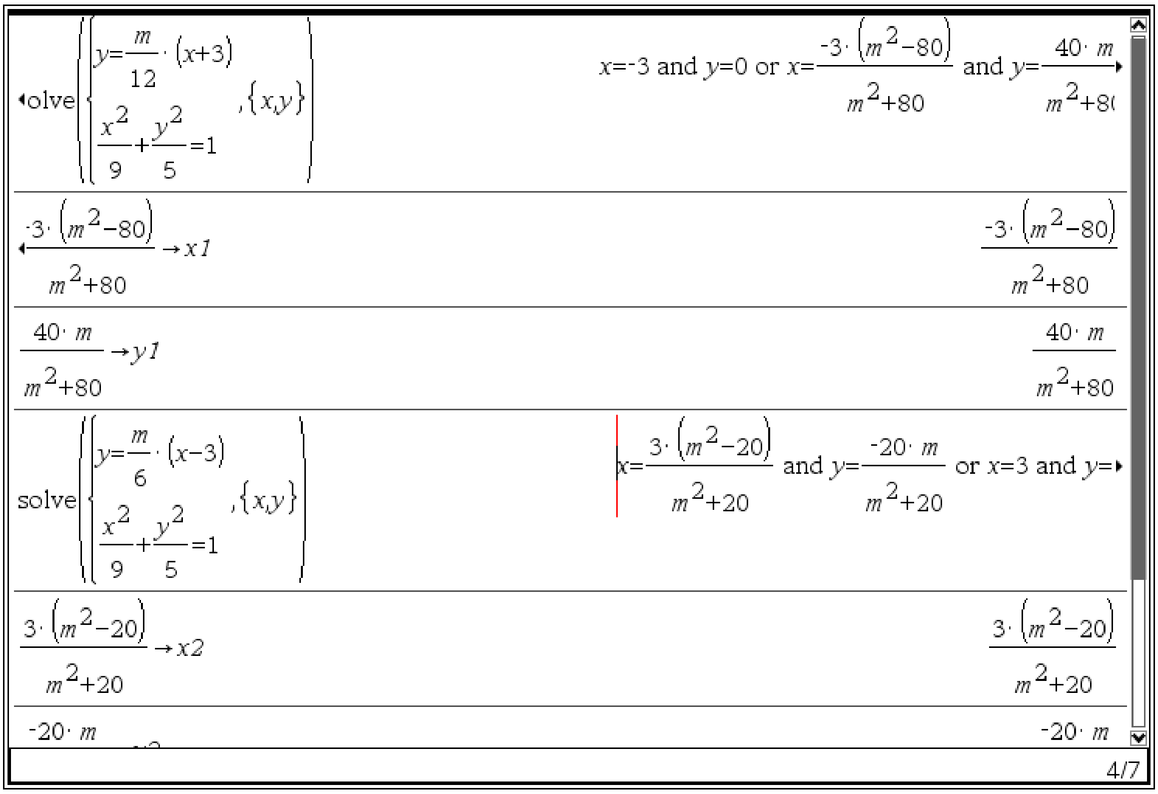
（1）设动点 P 满足 $PF^2-PB^2=4$，求点 P 的轨迹；

（2）设 $x_1=2,x_2=\dfrac{1}{3}$，求点 T 的坐标；

（3）设 $t=9$，求证：直线 MN 必过 x 轴上的一定点.（其坐标与 m 无关）







$$\frac{-3\cdot\left(m^2-80\right)}{m^2+80}\to x1 \qquad \frac{-3\cdot\left(m^2-80\right)}{m^2+80}$$

$$\frac{40\cdot m}{m^2+80}\to y1 \qquad \frac{40\cdot m}{m^2+80}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} y=\frac{m}{6}\cdot(x-3) \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1 \end{cases},\{x,y\}\right) \qquad x=\frac{3\cdot\left(m^2-20\right)}{m^2+20} \text{ and } y=\frac{-20\cdot m}{m^2+20} \text{ or } x=3 \text{ and } y=0$$

$$\frac{3\cdot\left(m^2-20\right)}{m^2+20}\to x2 \qquad \frac{3\cdot\left(m^2-20\right)}{m^2+20}$$

$$\frac{-20\cdot m}{m^2+20}\to y2 \qquad \frac{-20\cdot m}{m^2+20}$$

$$\text{solve}\left(y-y2=\frac{y2-y1}{x2-x1}\cdot(x-x2),x\right)\Big|y=0 \qquad x=1$$

7/99

通过实例可以看到利用代数功能实现各种运算操作，可以说代数功能运算改变了运算能力的内涵，让学生把更多的时间用于算理上.通过多种形式学习数学，学生能够更容易更深刻地理解数学概念，对问题更深刻的理解和更强的推理能力；一部分教育者认为CAS提供了很好的机会，使学生能够摆脱繁重的运算的折磨，将注意力集中在对数学精神的领会，并可以探讨一些以前认为是不合适再课堂上讨论的数学问题。