数学解题思维中的图形计算器参与一例

——对一道高考题的延伸探究

200063　上海市普陀区教育学院中学教研室　　刘达

2004 年的上海市数学高考试题依然延续了能力立意的原则，再次涌现了一些值得教师深入研究的新题。笔者在解答今年上海高考理科试卷第 20 题的同时，自己的思维也不断被问题所激发。这里，仅将本人的一些探究写下来，与各位分享“边解题，边联想”的点滴收获。

原题是这样叙述的：

已知二次函数 $y=f_1(x)$的图象以原点为顶点且过点(1,1)，反比例函数 $y=f_2(x)$的图象与直线 y=x 的两个交点间距离为 8，$f(x)= f_1(x)+ f_2(x)$.

(1) 求函数 f(x)的表达式；

(2) 证明:当 $a>3$ 时，关于 x 的方程 $f(x)= f(a)$ 有三个实数解.

本题的第一小题难度不大，只需由题设解出相应参数的值就可以最终确定函数 $f(x)$ 的表达式，经解得 $f(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$。

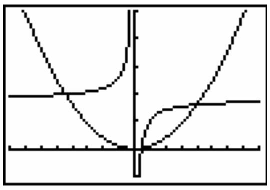
在解决第二小题时，也许是出于一个数学教师对这个问题的认识，我首先意识到关于 x 的方程 $f(x)=f(a)$ 必定会有一个解，即 $x=a$，于是自然地想到了将方程 $f(x)-f(a)=0$ 左侧的表达式进行因式分解，以后的解题思路与高考评分标准的证明方法二类似。

【分析思路一】由 $f(x)=f(a)$ 得$(x-a)(x+a-\dfrac{8}{ax})=0$,可知方程的一个解 $x_1=a$. 方程 $x+a-\dfrac{8}{ax}=0$ 可化为 $ax^2+a^2x-8=0$。首先分析$\triangle=a^4+32a$，由于 $a>3$，所以 $\Delta>0$。解到此处，尚不能确定方程一定有三个不同的实数解，需要进一步分析方程 $ax^2+a^2x-8=0$ 的两个解 $x_2=\dfrac{-a^2-\sqrt{a^4+32a}}{2a}$ 和 $x_3=\dfrac{-a^2+\sqrt{a^4+32a}}{2a}$ 与 $x_1=a$ 在题目条件下互不相等。于是进一步分析，由于 $x_2\cdot x_3=-\dfrac{8}{a}<0$ 所以只有正根 $\dfrac{-a^2+\sqrt{a^4+32a}}{2a}$ 可能等于 a，假设 $a=\dfrac{-a^2+\sqrt{a^4+32a}}{2a}$，则有 $3a^2=\sqrt{a^4+32a}$，推出 $a^4=4a\Rightarrow a=0$ 或 $a=\sqrt[3]{4}$,这与 $a>3$ 矛盾。所以，原方程必有三个不同的实数解。

刚完成解答时我感觉此题虽然有些细节学生不容易把握，但总体而言应当难度不大，然而学生是否能很快意识到 $x=a$ 呢？回顾本题所要研究的方程 $x^2+\dfrac{8}{x}=a^2+\dfrac{8}{a}$，它其实等价于一个三次方程，在高三学生的数学学习经历中，很少接触到三次方程求解的问题。刚才的证法，学生可依托的经验也许只有高中《复数初步》章节对于实系数一元多项式方程在复数范围内的根的个数研究。需要指出的是，以上这种解题方法考查的是高中数学常用思想方法中

“函数与方程”思想的灵活运用能力。由于缺少解题的经验，事实上这种解法对于多数的高三学生来说是不容易想到的。

当然，本题第二小题要求我们研究方程的解的个数，它其实又给了我们一个运用“数形结合”思想方法解题的思维空间。我们可将 $f(x)=f(a)$ 移项变形，得 $x^2=-\frac{8}{x}+a^2+\frac{8}{a}$，在同一个坐标平面内作出函数 $g_1(x)=x^2$ 和 $g_2(x)=-\frac{8}{x}+a^2+\frac{8}{a}$ 的图像，然后研究两者图像交点的个数。（当然，$f(x)=f(a)$ 也可以移项变形得 $\frac{8}{x}=-x^2+a^2+\frac{8}{a}$，类似的研究两个函数图像的交点.）


（图 1）

【分析思路二】图 1 是借助了图形计算器作出的当 $a=4$ 时两个函数 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 在同一坐标系内的图像（当然它们的草图也不难画出）。我们知道函数 $g_2(x)$ 中的参数 a 对图像的影响只是上下平移，由草图我们可知，在 $a>3$ 的前提下，只需确定函数 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 在第一象限的图像有两个不同的交点即可。当 $x=2$ 时，$g_1(2)=4$，$g_2(2)=-4+a^2+\frac{8}{a}$，由 $a>3\Rightarrow g_2(2)>5>g_1(2)$。又当 $x\to+\infty$ 时 $g_2(x)=-\frac{8}{x}+a^2+\frac{8}{a}<a^2+\frac{8}{a}<g_1(x)$；当 $x\to 0$ 时，$g_2(x)<0<g_1(x)$。综上可知，函数 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 的图像在第一象限必有两个不同的交点。

从评分标准来看，这种解法虽然思路比较明确，但在“为何第一象限有两个交点”的说理表达方面要求不低，许多学生在这里并不容易表述清楚。由此看来，仅就如何严谨的表达证明思路，本题也不失为今后教学中一个良好的范例。

随着解题的深入，一系列新的问题也开始逐渐显现，例如：

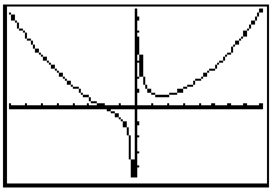
（1）对于第二小题所要证明的命题，$a>3$ 是否为结论的充要条件？若不是，那么该方程有三个实数解的充要条件是什么？

（2）证明方法一中最后所得到的 $a=\sqrt[3]{4}$ 究竟有什么意义？

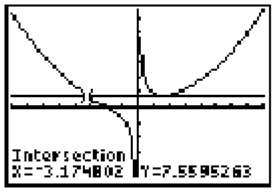
（3）函数 $f(x)=x^2+\frac{8}{x}$ 的图像是什么？如果能够确定，那么我们不就可以通过研究函数 $f(x)$ 的图像与常值函数 $y=a^2+\frac{8}{a}$ 的交点个数来证明本题？

为此，我继续作了一番延伸探究。其实，以上三个问题本质上是有关联的。为了尽快满足我对函数 $f(x)=x^2+\frac{8}{x}$ 的图像的“好奇心”，我拿出了图形计算器作出了函数

$f(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$的部分图像（如图 2）。由此猜想：函数 $f(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 单调递减，而在区间 $(0,+\infty)$ 有且仅有一个极值点。证明如下：



（图 2）



（图 3）

令 $f'(x)=2x-\dfrac{8}{x^2}=0\Rightarrow x^3=4\Rightarrow x=\sqrt[3]{4}$，

且 $f'(x)=2x-\dfrac{8}{x^2}>0\Rightarrow x^3>4\Rightarrow x>\sqrt[3]{4}$；

$f'(x)=2x-\dfrac{8}{x^2}<0\Rightarrow x^3<4\ \Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup\left(0,\sqrt[3]{4}\right)$，由此可得 $x=\sqrt[3]{4}$ 是函数 $f(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$ 的极值点，函数在区间 $(-\infty,0)$ 和 $\left(0,\sqrt[3]{4}\right]$ 递减，在区间 $\left[\sqrt[3]{4},+\infty\right)$ 递增。当然，函数 $f(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$ 的极值点我们也可以采用初等方法得到：当 $x>0$ 时，$x^2+\dfrac{8}{x}=x^2+\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x}\geq 3\sqrt[3]{16}=3\cdot 4^{\frac{2}{3}}$，当且仅当 $x^2=\dfrac{4}{x}\Rightarrow x=\sqrt[3]{4}$ 时等号成立。

从 $f(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$ 的图像我们不难发现，当 $f(a)=f(\sqrt[3]{4})=3\cdot 4^{\frac{2}{3}}$ 时，我们可由关于 a 的方程 $\left(\sqrt[3]{4}-a\right)\left(\sqrt[3]{4}+a-\dfrac{8}{\sqrt[3]{4}\cdot a}\right)=0$ 得到其中一个解是 $a=\sqrt[3]{4}$，另一解可由 $\sqrt[3]{4}+a-\dfrac{8\cdot 4^{-\frac{1}{3}}}{a}=0\Rightarrow a^2+4^{\frac{1}{3}}a-2\cdot 4^{\frac{2}{3}}=0\Rightarrow a=\sqrt[3]{4}$ 或 $a=-2\cdot\sqrt[3]{4}\approx -3.174802$（如图 3）得到。结合图像我们发现，$a>3$ 的确只是命题中的“方程 $f(x)=f(a)$ 有三个实数解”的一个充分条件，而充要条件应为“$f(a)>f(\sqrt[3]{4})$”亦即“$a>0$ 且 $a\neq\sqrt[3]{4}$ 或 $a<-2\cdot\sqrt[3]{4}$”。因此，本文的第一种解决方法中其实暗示了我们，当 $a>0$ 时，方程 $f(x)=f(a)$ 只有当 $a=\sqrt[3]{4}$ 时出现重根 $x=\sqrt[3]{4}$，此外必有三个不同的实数解。

在解决了这番疑问之后，我不禁有两点体会：

第一是感到这次探究归功于图形计算器的应用给我带来的启发。尽管上海的高考暂不允许使用图形计算器，不论是函数型计算器还是图形计算器，数学问题的解决关键还是需要着眼于能否选择正确有效的解题策略。在技术的支持下，我们获得的是更多发现问题的契机。就以这道高考题而言，无论是应用“函数与方程”的思想还是“数形结合”的思想，思维的

核心作用并不会因计算器的出现而被削弱，尽管也许使用图形计算器会产生解答细节或评分标准上的差别，但本题的能力考查目标依然能够实现。

另外，一个好的数学问题背后往往蕴含着广阔的思维空间，中学数学的课程改革提倡让学生在学习中经历数学探究的过程、领悟数学的思想方法。作为一个数学教师，在高考题研究过程中，如果都能少花一份精力去设计模拟训练题，多花些精力去引导学生与我们一同体验数学思维的乐趣。那么，无论是我们自己还是我们的学生，恐怕都会更快乐些吧。