函数$\dfrac{1}{f(x)}$的图象与性质探究

上海市第二中学　　胡毅

（机型：TI-83 Plus）

教学目标：

1、经历探索互为倒数的两个函数图象之间关系的过程，研究它们的性质，体验研究函数性质的过程和方法。

2、掌握互为倒数的两个函数之间零点和渐进线、奇偶性、单调性之间的关系。

3、增强数形结合的意识。

4、体验“实验—归纳—猜测—论证”的过程。

教学重点和难点：

1、 互为倒数的两个函数图象之间的关系。

2、 互为倒数的两个函数性质之间的关系。

3、 体验“实验—归纳—猜测—论证”的过程。

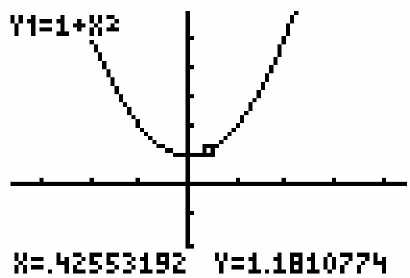
教学过程：

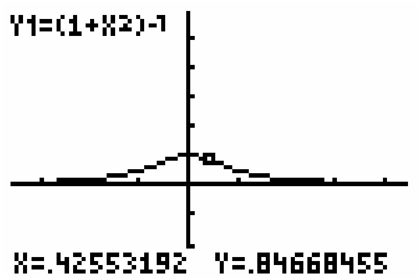
一、问题的提出：

T:我们已经研究了函数 $f(x)$ 与函数 $f(x+a)$ 、 $f(x)+b$ 、 $f(|x|)$ 、 $|f(x)|$ 的图象之间的关系。请同学翻到教材（高一第一学期）第 105 页练习 4.1（2）第 2 题：作函数 $y=\dfrac{1}{1+|x|}$ 的大致图象，并写出它的单调区间、最大或最小值。在学习过程中，有同学提出这样一个问题：能否先作出函数 $y=1+|x|$ 的大致图象，再利用倒数作出函数 $y=\dfrac{1}{1+|x|}$ 的大致图象。要解决这个问题，下面我们就要研究互为倒数的两个函数图象和性质之间的关系。

二、实验阶段：

学生用 TI-83plus 图形计算器画出函数 $y=1+x^2$ 和 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 图象，并加以记录：



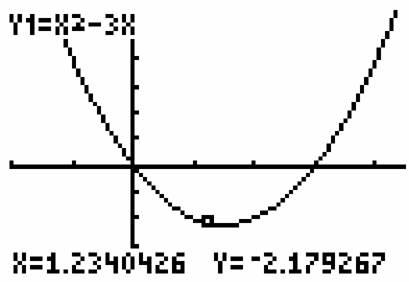


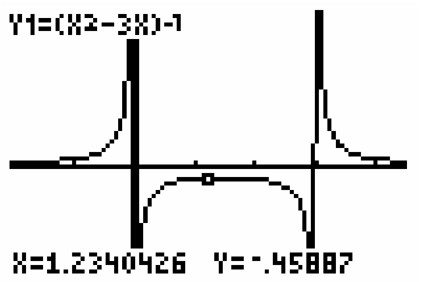
T:仅仅用一组函数能否准确地归纳出函数 $f(x)$ 和 $\dfrac{1}{f(x)}$ 图象之间关系呢？会不会有其它未显示的规律呢？

即使是不完全归纳法，也必须建立在大量事实的基础上，这里如果只凭一组函数的图象就进行归纳猜测，未免有些草率；而且函数 $y=1+x^2$ 和 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的图象并不能反映出互为倒数的两个函数之间零点和渐进线之间的重要关系，因此

这里教师要指导学生继续用其它函数进行尝试。

例：用 TI-83plus 图形计算器画出 $y=x^2-3x$ 和 $y=\dfrac{1}{x^2-3x}$ 图象：





此时学生纷纷用各类函数进行实验，积累了较多的图象，部分程度较好的同学已经开始研究两者之间的内在关系。

三、提出问题，进行猜测和验证：

T:根据图象，你认为函数 $f(x)$ 和 $\dfrac{1}{f(x)}$ 的图象和性质之间有哪些值得研究的问题或可能哪些地方有规律，可以和其他同学讨论后再回答。

这里让学生充分讨论后，自由地表达自己的想法，教师将其整理在黑板上。主要的问题和猜想如下：

1、函数 $f(x)$ 的图象是连续的，但是函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 的图象有时会分成好几段，这是为什么？

2、函数 $f(x)$ 没有垂直方向渐进线时，函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有时会出现垂直方向渐进线，它们是哪里来的？

3、函数 $f(x)$ 和 $\dfrac{1}{f(x)}$ 的奇偶性相同。

4、函数 $f(x)$ 和 $\dfrac{1}{f(x)}$ 的单调区间相反。

5、函数 $f(x)$ 和 $\dfrac{1}{f(x)}$ 的交点一定在直线 $y=1$ 或 $y=-1$ 上。等等。

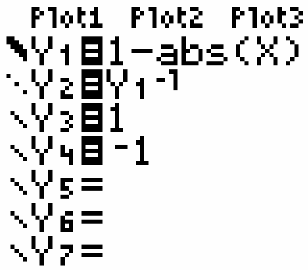
在这里，学生提出的有的猜想在表述上有问题，例如上面的第 4 点；有的猜想是错误的，对于这些教师可以在验证时予以纠正，但仍应持鼓励的态度，不应轻易否定，以保护学生的积极性。

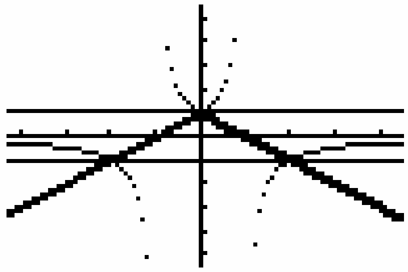
T:刚才我们提出了一系列的问题和猜想，请对这些问题和猜想没有考虑过的同学用手中的图形计算器验证一下。

这个阶段一是给予学生思考问题的时间，二是可以对一些错误的猜想举出反例，对不严密的猜想予以纠正，有同学提出函数 $f(x)$ 和 $\dfrac{1}{f(x)}$ 单调区间的问题必须考虑到定义域和函数值正负的影响；从而也对回答第 1 点提供了提示，函数 $f(x)$ 的图象是连续的，但函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 的图象有时会分成好几段，这也是因为定义域的影响。

有的同学将函数 $f(x)$ 和 $\dfrac{1}{f(x)}$ 的图象画在同一屏幕中，并由第 5 点得到启发，在屏幕中还画出了 $y=1$ 和 $y=-1$ 这两条直线，在这个过程中，学生不但进行了验证，还发现了新的规律。

例：在同一屏幕中作出函数 $y=1-|x|$ 和 $y=\dfrac{1}{1-|x|}$ 的图象：





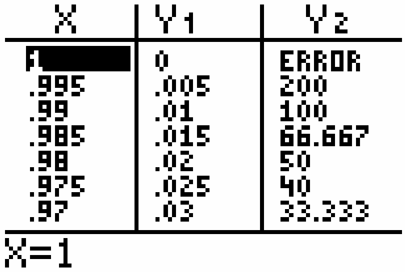
当 $f(x)\in[0,1)$ 时，相应的 $\dfrac{1}{f(x)}\in(1,+\infty)$；当 $f(x)\in(1,+\infty)$ 时，相应的 $\dfrac{1}{f(x)}\in[0,1)$；

当 $f(x)\in(-1,0]$ 时，相应的 $\dfrac{1}{f(x)}\in(-\infty,1)$；当 $f(x)\in(-\infty,1)$ 时，相应的 $\dfrac{1}{f(x)}\in(-1,0]$。

这个结论学生很容易由不等式的倒数性质得到证明，进而可以说明第 5 点的正确，即在 $f(x)>1或f(x)<1$ 时，函数 $f(x)$ 和 $\dfrac{1}{f(x)}$ 不可能有交点存在。

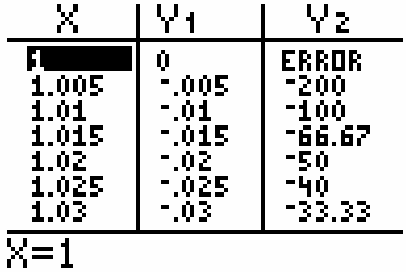
四、论证：

由于学生并未学习极限和渐进线的准确定义，无法进行严格意义上的证明，但是通过观察，学生可以得出结论，即互为倒数的两个函数之间零点和渐进线的关系：如果 $f(a)=0$，那么 $x=a$ 为 $\dfrac{1}{f(x)}$ 的渐进线。利用 TI-83plus 的函数值表功能观察函数 $y=1-|x|$ 和 $y=\dfrac{1}{1-|x|}$ 在 $x=1$ 附近的函数值，学生对渐进线可以得到直观上的理解。



X	Y1	Y2
1	0	ERROR
.995	.005	200
.99	.01	100
.985	.015	66.667
.98	.02	50
.975	.025	40
.97	.03	33.333

X=1



X	Y1	Y2
1	0	ERROR
1.005	⁻.005	⁻200
1.01	⁻.01	⁻100
1.015	⁻.015	⁻66.67
1.02	⁻.02	⁻50
1.025	⁻.025	⁻40
1.03	⁻.03	⁻33.33

X=1

对第 3 点进行证明：如果函数 $f(x)$ 为奇函数，求证：

（1）函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 的定义域关于原点对称。

（2）函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 也为奇函数。

对第 4 点进行证明：如果在区间 (a,b) 上函数 $f(x)$ 恒正或恒负，且 $f(x)$ 单调递增，求证：函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 单调递减。

证明过程略。

五、课堂小结：

T:回到教材第 105 页练习 4.1（2）第 2 题：作函数 $y=\dfrac{1}{1+|x|}$ 的大致图象，并写出它的单调区间、最大或最小值。我们现在至少有 3 种方法做这个题：

方法一使用的函数变换顺序是： $y=\dfrac{1}{x} \to y=\dfrac{1}{1+x} \to y=\dfrac{1}{1+|x|}$；

方法二使用的函数变换顺序是： $y=1+x \to y=1+|x| \to y=\dfrac{1}{1+|x|}$ ；

方法三使用分段函数解题。针对此题，请大家考虑一下，用那种方法较为准确简便？

大多数同学选择方法一和方法三，原因是方法二在作图时并不方便。（主要是单调性虽然可以确定，但从 $f(x)$ 到 $\dfrac{1}{f(x)}$ 的变换中，图象的凹凸很难确定。）

T:我们已经研究了函数 $f(x)$ 与函数 $f(x+a)$ 、$f(x)+b$ 、$f(|x|)$ 、$|f(x)|$ 、$\dfrac{1}{f(x)}$ 的图象与性质之间的关系。请同学们想一下：从函数 $f(x)$ 到 $\dfrac{1}{f(x)}$ 的变换中，还有什么规律值得研究吗？函数 $f(x)$ 还有其它的变换吗？

学生提出 $2f(x)$ 、$\dfrac{f(x)}{3}$ 、 $f^2(x)$ 、$\sqrt{f(x)}$ 等变换。

教师布置作业：请学生任选一种函数的变换进行研究。

教学小结：

如果将数学教学不仅仅看成是知识的传授；掌握了数学的思想方法和精神实质，就可以由不多的几个定理、公式演绎出千变万化的生动结论，显示出无穷无尽的威力。如果仅仅将数学作为知识来学习，而忽略了数学思想方法对学生的熏陶和学生数学素质的提高，就失去了数学课程最本质的特点和要求，失去了开设数学课程的意义。

上海市二期课改的课程标准提出：“充分关注数学课程中的学习过程：要展现知识的生成、发展和形成的过程，提供学生亲身感受、体验的机会；要把学知与学做紧密结合起来，使学生获得认知、参加活动、增加体验、发展情感态度与价值观在数学学习中得到和谐统一，促使学生能够在获得对数学的理解的同时，逐步学会学习和思考，增长经验和智慧，形成正确的价值观。”“重视现代信息技术的应用，改善数学课堂教学过程，帮助学生理解数学知识本质和提高数学应用能力。改进数学学习方式，推动数字化学习和研究性学习的开展。”

在数学教学过程中，要鼓励并推动学生解决一些理论或实际的问题。这些问题没有现成的答案，没有固定的方法，没有指定的参考书，没有规定的数学工具，

甚至也没有成型的数学问题。主要靠学生独立思考、反复钻研并相互切磋，去形成相应的数学问题，进而分析问题的特点，寻求解决问题的方法，得到有关的结论，并判断结论的对错与优劣。总之，让学生亲口尝一尝梨子的滋味，亲身去体验一下数学的创造过程，取得在课堂里和书本上无法代替的宝贵经验。上这节课的想法源于在必修课教学过程中和在作业中反映出来的问题，是可以简单处理掉，给学生一个结论或一个解题的模式，但这样一来，不仅使学生失去了一次体验数学研究的机会，而且容易使学生在思想上处于一种僵化状态，不利于数学素养的提高。

学生学案：

一、请您写出一个函数 $y=f(x)$ 和相应的 $y=\dfrac{1}{f(x)}$，并画出它们的图形：

$y=f(x)$	$y=f(x)$ 的图象	$y=\dfrac{1}{f(x)}$	$y=\dfrac{1}{f(x)}$ 的图象

二、根据图象，你认为函数 $f(x)$ 和 $\dfrac{1}{f(x)}$ 的图象和性质之间有哪些值得研究的问题或可能哪些地方有规律？

1、

2、

3、

4、

5、

6、

三、通过验证和思考，对上述问题和猜想你得到哪些结论？

四、对于这些结论，你能加以说明或证明吗？

参考文献：

《数学家李大潜院士论数学教育与素质教育》

《上海市中小学数学课程标准》