2005 年上海市 TI 杯高二年级数学竞赛

个人赛试题

(2005 年 5 月 28 日上午 9:00~10:30)

一、填空题：(共8小题，前4小题每题6分，后4小题每题9分，满分60分)

1、计算：$3(1+\frac{1^2}{4\cdot 6}+\frac{1^2\cdot 3^2}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 16\cdot 18})=$

______________(精确到0.0001) 。

2、天文学中，常用一个平太阳日表示一天，一个平太阳日分为 24 个平太阳小时，一个平太阳小时分为 60 个平太阳分，一个平太阳分分为 60 个平太阳秒。天文学计算地球的一个回归年等于 S 个平太阳日是用下面公式进行计算的 S=365.2421988—0.0000000614(t—1900) (平太阳日)，其中t是公元年份数，按上述公式计算，可求得 2005 年的一个回归年=___________平太阳日__________平太阳时___________平太阳分____________平太阳秒 (精确到 1 秒) 。

3、比较大小：$(\frac{2004}{10})^{2005}$____________$(\frac{2005}{10})^{2004}$(用“＞” 或“＝”或“＜”连接)。

4、设$\{\alpha_n\}$是首项为 1，公差为 2 的等差数列，若$\{\alpha_n\}$的连续 k(k≥2) 项的和为2005，则 k 的值为_____________。

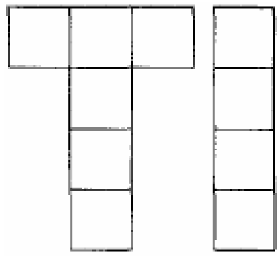
5、我国经近 30 年努力，有效地控制了人口的过快增长，2005 年 1 月 6 日是中国 13 亿人口日。根据统计，我国 1969 年底人口是 8.0671 亿，到 1974 年底人口是9.0859 亿，这 5 年的中国人口年均增长率是________________；若我国人口以这个年均增长率增长，从 1974 年底到 2004 年底我们人口将比 13 亿多出______________亿(精确到百万)。

6、已知

$f(n)=2n+1$，$g(n)=\begin{cases}3, & 若n=1；\\ f[g(n-1)], & 若n\geq 2,\end{cases}$ 其中$n\in Z^+$，则g(12)的值是_________。

7、一个三位数$\overline{abc}$满足$a-b^2+c^3=\overline{abc}$，则这个三位数是__________________。

8、将数 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 分别填入字母TI 的十个空格内，使一横 (3 个数) 两竖 (各4个数)中数的和都相等，则满足这样条件的字母 T 一横三格中的数字连起来所组的三位数或四位数的最大值是____________；最小值____________。



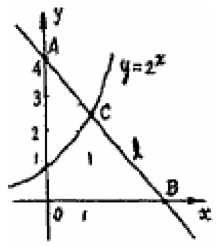
解答以下三题必须写出解题的必要步骤：

二、(本题满分 20 分)

己知 $\{\alpha_n\}$ 数列的首项，a1=2，且 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{3}(n\in Z^+)$，求使不等式 $|a_{n+1}-a_n|<10^{-9}$ 成立的最小正整数n。

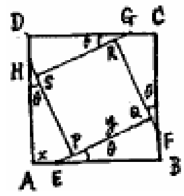
三、(本题满分 20 分)

如图，己知直线l过点 A(0,4)，交函数 $y=2^x$ 的图象于点C, 交 X 轴于点 B, 若 AC∶CB=2∶3，求点B的横坐标(精确到 0.01) 。



四、(本题满分 20 分)

如图，ABCD 是边长为 1 的正方形，点 E、F、G、H 顺次在边AB、BC、CD、DA上，且AE=BF=CG=DH= $x(0<x\le\frac{1}{2})$，过点E、F、G、H分别作射线EQ、FR、GS、HP, 且 $\angle QEB=\angle RFC=\angle SGD=\angle PHA=\theta$，这里 θ 为定角，且0°< θ <145°，这样得到四边形 PQRS，



(1) PQRS 是怎样的四边形？证明你的结论；

(2) 设PQ=y，试将y表示成 x 的函数；

(3) 是否存在角 θ，使 $\dfrac{y}{x}$ 为与 x 无关的定值？若存在，求出相应的 θ 的值；若不存在，说明理由。