源于网络讨论与TI教育技术的数学发现之旅

——基于TI技术缤纷数学QQ群的问题讨论纪实

□ 高建彪

TI技术缤纷数学QQ群（152837587）是德州仪器（TI）教育技术的官方交流群，汇集了国内外热衷于研究TI教育技术的数学教师。2012年4月上旬，群中两位教师先后提出同一个问题——如何确定一个中心对称图形的对称中心？由此引发了一场网络形式的学术讨论，本人特将讨论前后的思想闪光点整理出来与各位分享。

网络讨论问题的阐述

教师甲：如何利用TI图形计算器作出中心对称图形的对称中心？（提出时间：2012.3.30）

教师乙：求函数的对称中心是否有通用方法？（提出时间：2012.4.6）

本人对问题的初步思考

中心对称图形是中小学数学教师十分熟悉的知识，小学与初中数学教材中就提出，旋转180°后能完全重合的几何图形是中心对称图形。高中数学教材中虽未出现过更深层次的定义，但对一些函数性质的研究，多次出现了中心对称的说法，如$y=x^3$与$y=\sin x$的对称性讨论，特别常见的是研究函数$y=A\sin(\omega x+\phi)$的对称中心。

群中的高手竟然在中心对称图形这一简单背景下提出了需要讨论的问题，看似简单的问题，折腾了我几日依旧不能全解。我先后经历如下思考。

思考1：TI图形计算器中，有一几何作图功能是“变换→中心对称”，它能作出一个关于某点对称的几何图形，而要尝试寻找中心对称图形的对称中心，TI技术似乎不可能。

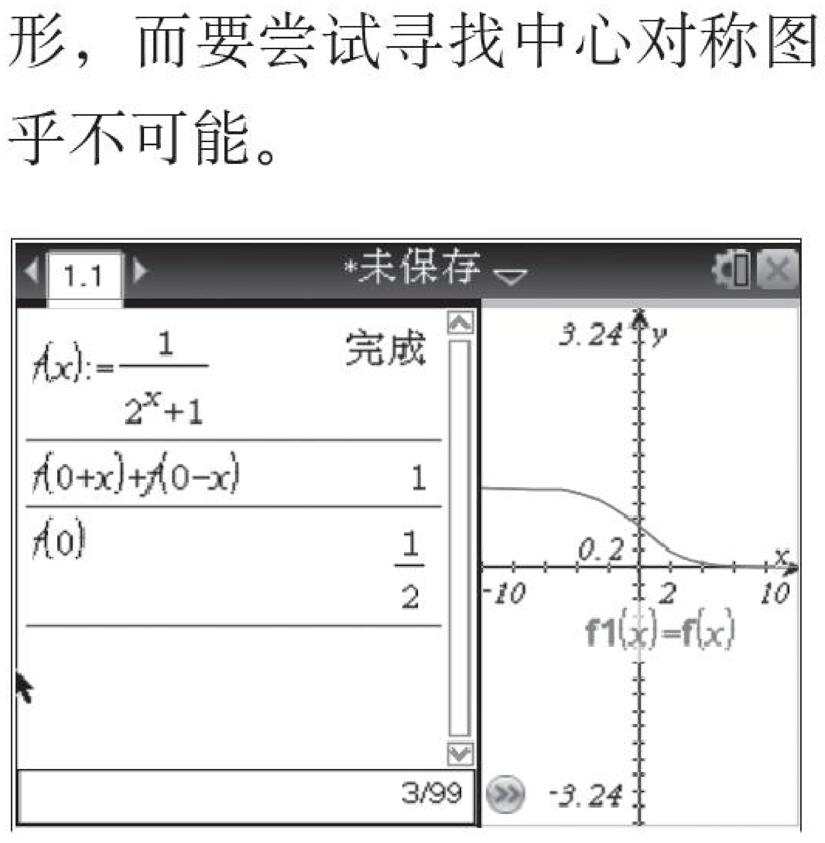

图1

思考2：函数f(x)的对称中心的研究，我们能通过$f(a-x)+f(a+x)=2f(a)$恒成立而确定出其对称中心为$(a,f(a))$，若直接验证是否中心对称尚能轻易解决，但若要求解对称中心则计算量可能颇大。例如，用TI图形计算器研究$f(x)=\frac{1}{2^x+1}$的对称中心，作出其图形（如图1），很容易观察出其对称中心为$(0,\frac{1}{2})$，且能轻松验证。然而，若要直接求$f(x)=\frac{1}{2^x+1}$的对称中心，感觉用TI图形计算器似乎无法下手。

经历以上思考，我只能遵循网络时代的一句流行语，“有问题问百度”，网上搜索一番，发现两个同类的研究成果。

成果1：多边形的对称中心可通过两组对应点连线而得，曲线边界图形的对称中心可通过两组平行切线的切点连线而得，如椭圆的对称中心（如图2）。

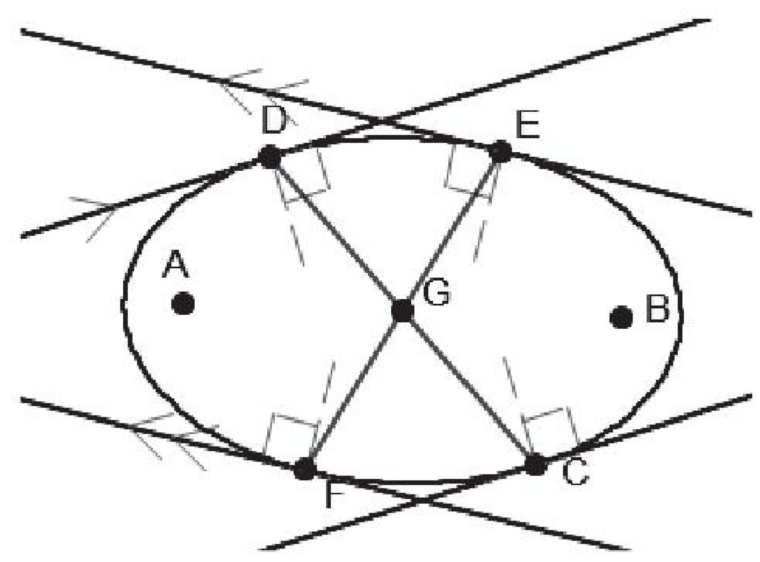

图2

成果2：网上讨论最多的是三次函数的对称中心，并有发表于报刊杂志的，见http://wenku.baidu.com/view/3a4dad87bceb19e8b8f6ba98.html，大致结论就是三次函数的图像是中心对称图形，且有对称中心的具体公式。

王老师对问题的两次研究

王老师是群中的一位退休教师，之前工作于北京市第十九中学。王老师虽已退休，但研究数学问题依然堪称我们的表率。

王老师先撰写《三次函数的图像是中心对称图形》一文并共享于群中，文章讲解了对三次函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$对称中心的研究过程，通过对图像的观察、变化趋势的分析，猜测$y''=0$时的拐点G可能就是对称中心，解$y''=0$，得$x=\frac{-b}{3a}$，代入三次函数得$G=(\frac{-b}{3a},\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^2})$，最后再证明这就是三次函数的对称中心。

时隔两天，王老师又撰写第二篇文章《如何确定中心对称图形的对称中心》，文章先从几何角度介绍了用求轨迹交点的方法确定对称中心（如图3），椭圆的动弦一端固定，易知对称中心在动弦的中点的轨迹上，从而两个轨迹的一个

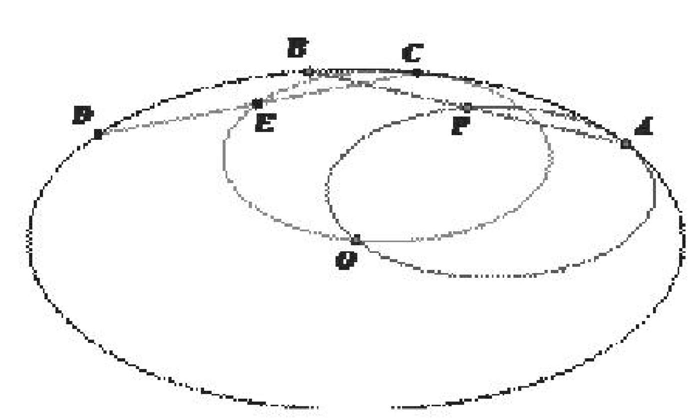

图3

交点即是对称中心。这一几何方法可谓是独出心裁。

接下来可得到立足于几何方法基础上的代数方法，即在f(x)上取一定点$P_1(x_1, f(x_0))$与动点$M(x_1, f(x_0))$，易求得动线段P_1M中点的轨迹方程$g_1(x, y)$，同样求得动线段P_2M中点的轨迹方程$g_2(x, y)=0$，解方程组$\begin{cases} g_1(x, y)=0 \\ g_2(x, y)=0 \end{cases}$，其中一解即为对称中心。

本人对问题的再次思考

读王老师的文章，让我茅塞顿开，内心十分敬佩王老师的睿智。思绪万千的我，利用TI图形计算器进行尝试。先是探究几何图形的对称中心，作得第一条动弦（一端固定）的中点轨迹之后，作第二条动弦的中点轨迹，当指针移到第一条轨迹上时，意外发现又得一条新的轨迹，且两条轨迹的交点即为对称中心，这是纯属巧合吗?

我又尝试了另一个几何图形，并进一步上升到对函数图像的尝试，发现利用TI图形计算器能较完美地作出对称中心。具体步骤如下：

第一步，在图形或函数图像上，分别取定点P与动点M，作线段MP及其中点；

第二步，调用“作图→轨迹”，先选择要改变的对象（中点），再选择约束对象（动点M），得到动弦MP中点的轨迹（如图4、图6、图8）；

第三步，再次调用“作图→轨迹”，在轨迹上任取一点作为改变的对象，再选择点P为约束对象，得到新轨迹（如图5、图7、图9）。

两轨迹交点即是对称中心，请见下面三组对称图形的研究图示（左侧为第二步结果，右侧为第三步结果）。

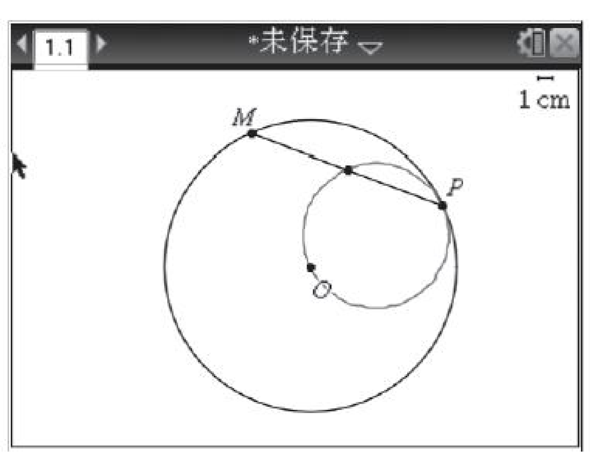
图4

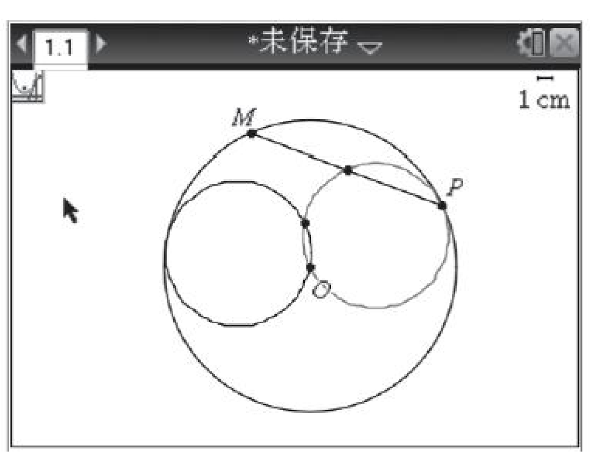
图5

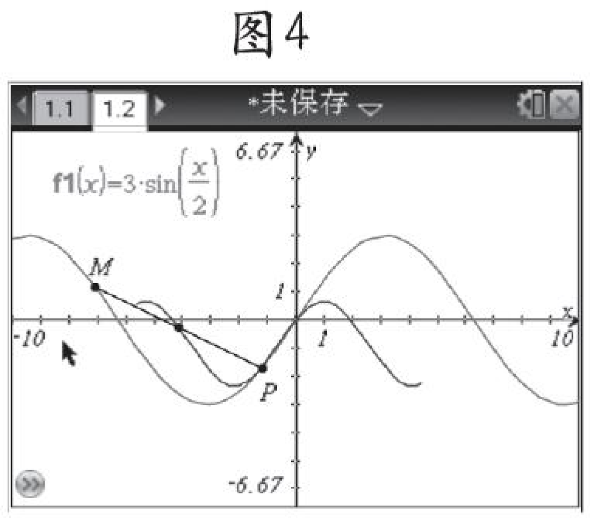

图6

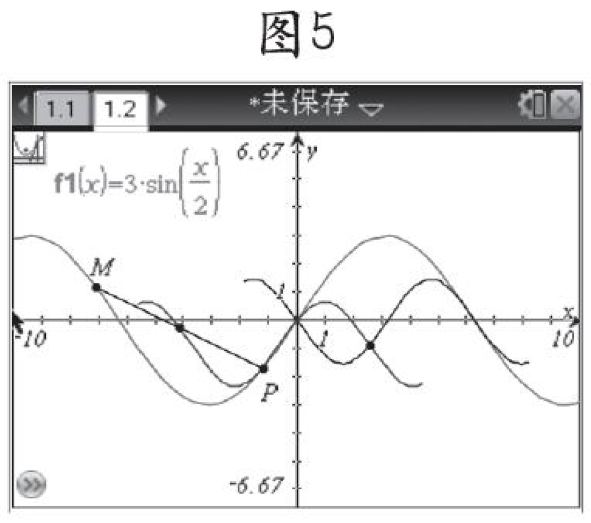

图7

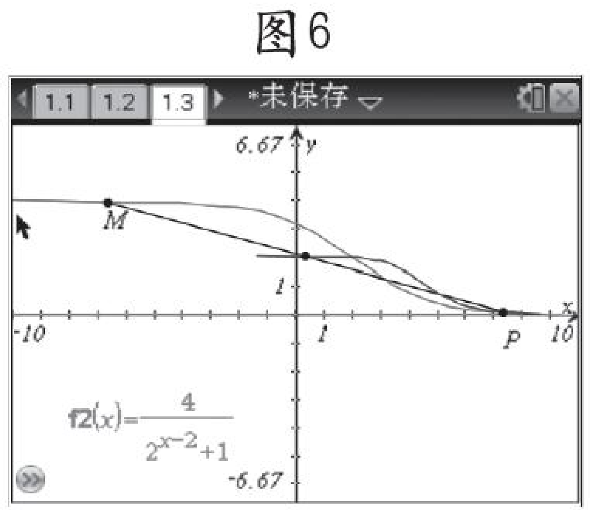

图8

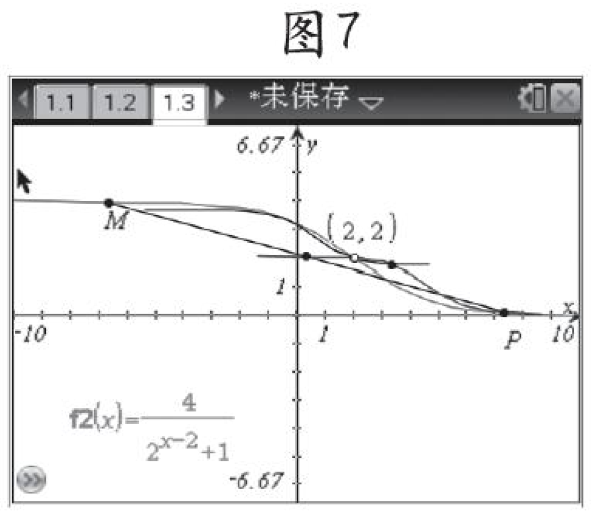

图9

以上两轨迹的交点，由王老师文章中的几何作图法得出，容易理解其道理，但需注意对第二条轨迹的深刻理解。

撰写此文的再收获

我读王老师的第二篇文章，在进行TI工具的尝试中触动出新的解法，萌生再写一文的念头，动笔撰文梳理过程中，思路越梳理越明朗，在撰写“本人的初步思考2”时，竟然又得到了一种代数解法，大胆放开了对问题初步思考时的尝试力度。

求函数f(x)的对称中心，就是解关于a、b的方程组$\begin{cases} f(a-x_0)+f(a+x_0)=2f(a) \\ f(a)=b \end{cases}$（$x_0$为任一特殊值），我们用TI图形计算器求解几例如下（如图10、图11、图12、图13）。

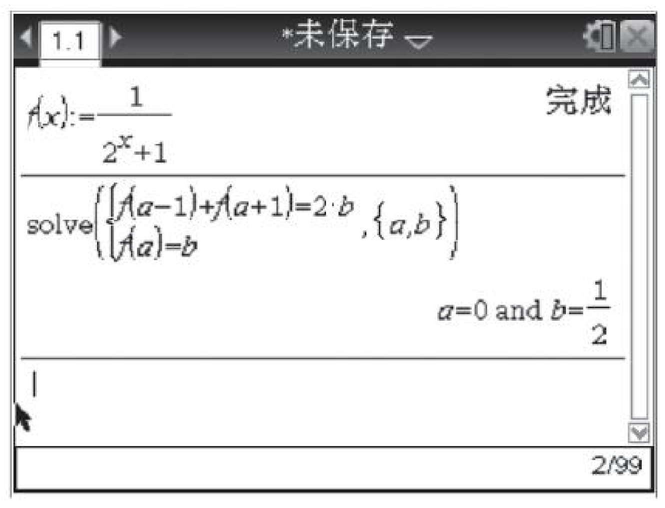

图10

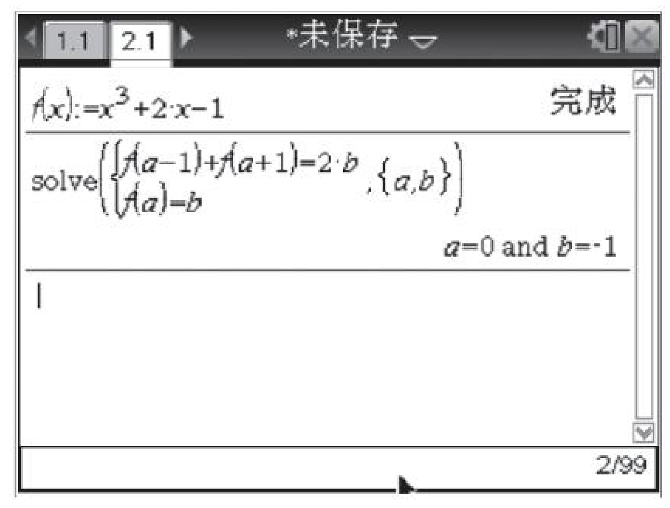

图11

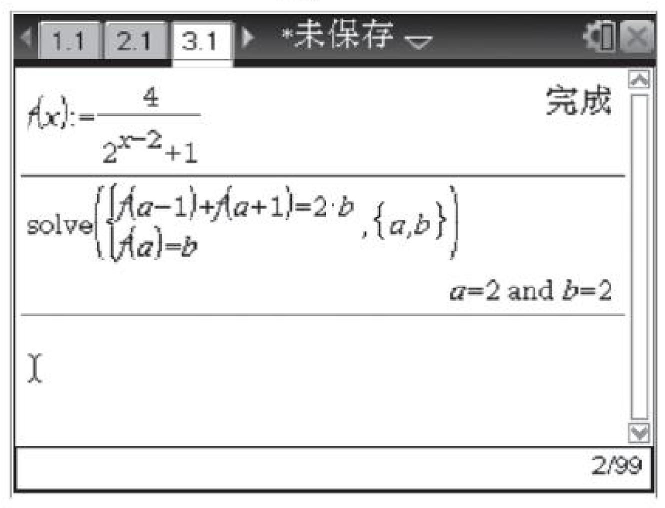

图12

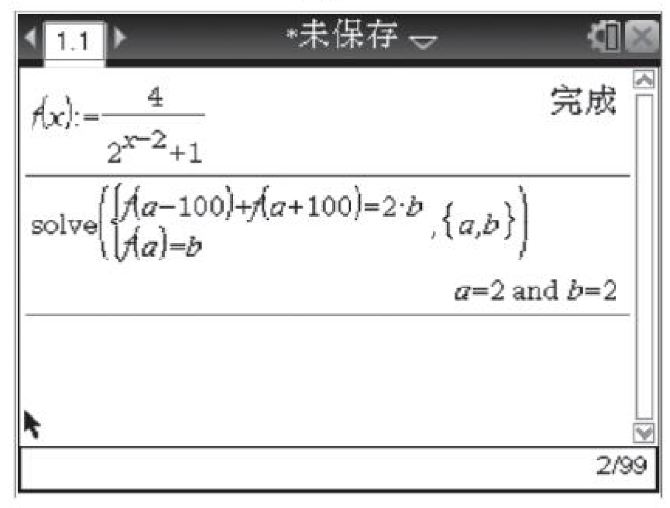

图13

（注：特值x_0依次取1、1、1、100）

文章共享于群中后，第二天晚上十点，王老师又帮我纠正了文中的错误，即用解方程组的方法求对称中心时，需注意满足条件“f(a)是存在的”，否则求不出解（如图14）。另外，如果对称中心在曲线上，则它一般也是拐点，解$y''=0$即可。

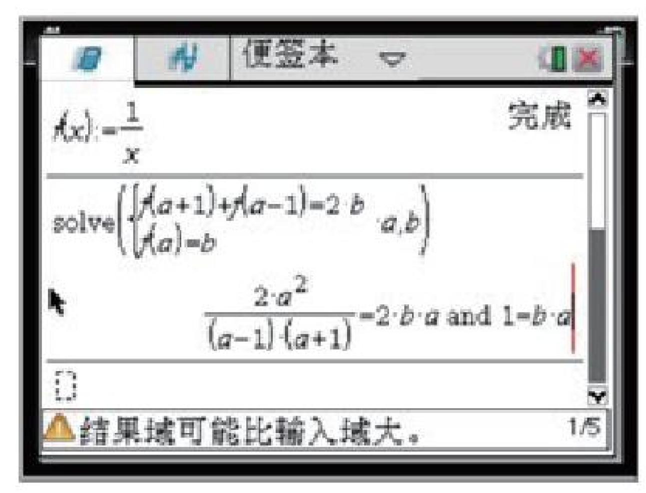

图14

撰写此文，我花费将近五个小时，但丝毫没有感觉到思维的疲劳，而是始终沉浸在思考的那份快乐之中，也再次感受到了TI图形计算器在研究解决数学问题时的作用，充分享受了TI图形计算器有效帮助我们研究与发现新方法之旅，再次回应了我坚持的一个观点：“TI图形计算器的运用不会削弱学生的计算能力，而是使计算能力的内涵有了新的变化，在信息技术日益发展的今天，我们应当不再是立足于培养学生的死算，而应当通过技术工具的使用加强算理学习，为培养立足于科学技术工具之上的数理人才而努力”。@

（作者单位：广东中山市东升高中）