三角方程解的讨论

华东理工大学附中　汪海峰

机型：TI-92plus

目标：利用三角函数的有界性和数形结合的方法讨论三角方程的解。

重点：利用数形结合讨论三角方程的解。

难点：如何根据三角方程构造合适的函数。

过程：

导入：若关于 x 的三角方程 sinx=2a-1 有解，求 a 的取值范围。

解：∵|sinx|≤1　　∴|2a-1|≤1　即 a∈[0，1]。

思考 1：

若关于 x 的三角方程 $\sqrt{3}$sinx+cosx+a=0（☆）有解，求 a 的取值范围。本题是否可以利用上题的方法求解？

解：原方程即- a=$\sqrt{3}$sinx+cosx=2Sin（x+π/6）

∵|sin（x+π/6）|≤1　　∴|-a|≤2　即 a∈[-2，2]。

小结：上述两题利用了三角函数的有界性。即|sinx|≤1，|cosx|≤1。

思考 2：

对于方程（☆），若给定 x∈（0，π），那么 a 的取值范围是什么？

解：原方程即- a=$\sqrt{3}$sinx+cosx=2sin（x+π/6）

∵x∈（0，π）

∴2sin（x+π/6）∈（-1，2]

∴- a∈（-1，2] 即 a∈[-2，1 ）。

思考 3：

对于方程（☆），若在给定 x∈（0，π）上有两个相异的实根，那么 a 的取值范围和思考 2 相同吗？

解：原方程即$-a=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin(x+\pi/6)$　$x\in(0,\pi)$

设$y_1=2\sin(x+\pi/6)$　$x\in(0,\pi)$；$y_2=-a$.

则原方程在给定$x\in(0,\pi)$上有两个相异的实根即函数y_1、y_2的图象有两个不同的交点。

由图象（如图 1）

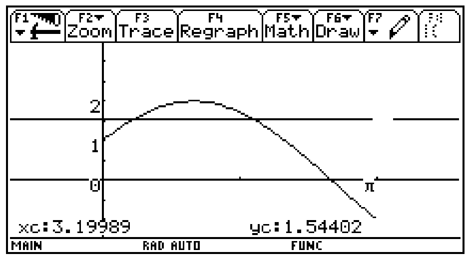

图 1

可知：$-a\in(1,2)$ 即 $a\in(-2,-1)$

思考 4：

思考 2 中，假设给定$x\in(0,\pi)$两相异实根为α、β，那么$\alpha+\beta=$?

解：α、β为不定根，它们是函数y_1、y_2图象交点的横坐标。

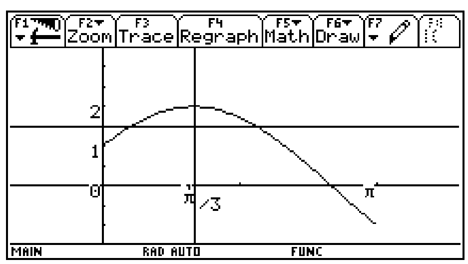

图 2

由图象（2）

可知：此两交点关于直线$x=\pi/3$对称。∴$\alpha+\beta=2\pi/3$

设疑：假设在给定$x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)$ $(k\in Z)$时方程有两相异实根为α、β，那么$\alpha+\beta=$?

解：由三角函数的周期性，可知：$\alpha+\beta=2k\pi+2\pi/3$ $(k\in Z)$。

思考 5：

对于方程（☆），若在给定$x\in(0,\pi)$上有一个实根，那么 a 的取值范围又是什么？

解：原方程即$-a=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin(x+\pi/6)$　$x\in(0,\pi)$

设 $y_1=2\sin(x+\pi/6)$　$x\in(0,\pi)$；$y_2=-a$.

则原方程在给定 $x\in(0,\pi)$ 上有一个实根即函数 y_1、y_2 的图象有一个交点。由图象（如图 3）

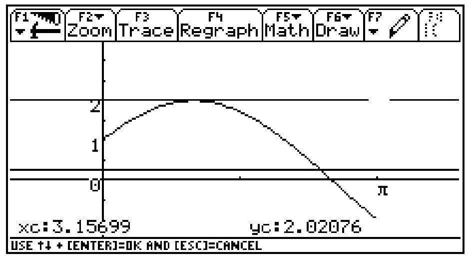

图 3

可知：$-a\in(-1,1)\cup\{2\}$ 即 $a\in(-1,1)\cup\{-2\}$。

思考 6:

对于方程（☆），若改为 $2\sin x+\cos 2x+a=0$，试就 a 的取值范围，讨论方程在 $[0,2\pi]$ 内解的情况。

方法一：可以构造函数 $y_1=2\sin x+\cos 2x$，$x\in[0,2\pi]$；$y_2=-a$.再根据它们图象的交点个数来讨论。但函数 $y_1=2\sin x+\cos 2x$，$x\in[0,2\pi]$ 的图象手工作图不现实，也不准确。

方法二：可以把函数 $y_1=2\sin x+\cos 2x$，$x\in[0,2\pi]$ 转化为我们熟悉的二次函数，再用数形结合的方法来讨论。

解：原方程即 $a=2(\sin x)^2-2\sin x-1$，$x\in[0,2\pi]$

设 $t=\sin x$，$t\in[-1,1]$，　则 $a=2t^2-2t-1$

设 $y_1=2t^2-2t-1=2(t-1/2)^2-3/2$，$t\in[-1,1]$；$y_2=a$.

由图象（如图 4）

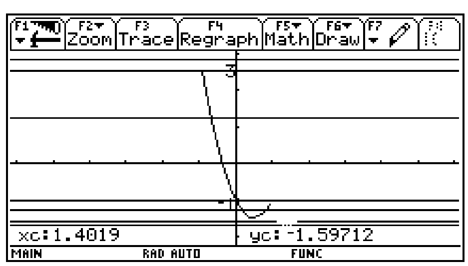

图 4

可知：（1）当 $a>3$ 或 $a<-3/2$ 时，原方程无解；

（2）当 $a=3$ 时，$t=\sin x=-1$，原方程有一解 $x=3\pi/2$；

（3）当$-1<a<3$或$a=-3/2$时，原方程有两解；

（4）当$-3/2<a\leqslant-1$时，原方程有四解。

小结：

对于三角方程解的讨论，我们可以通过以下途径：

（1） 用三角函数的有界性，此种解法可以解决解的存在性问题，但无法确定解的个数；

（2） 利用数形结合，构造一个动函数（往往是常值函数）和一个定函数，通过它们图象交点的个数来确定原方程解的个数。

练习：

（1） 若关于x的方程$\sin^2x+4\sin x\cos x-2\cos^2x+1+m=0$有解，求实数m的取值范围；

（2） 求实数m的取值范围，使关于x的方程$\sin^2x-\sin x+m=0$在$[-\pi/2,\pi/2]$上无解；恰有一解；有两解；

（3） 若关于x的方程$2\cos2x+4(a-1)\sin x-4a+1=0$在$[0,2\pi]$范围内有相异实根，求实数a的取值范围。

2002．6．4．