关于函数图象对称性的研究

北京工业大学附属中学　　　胡丛远

通讯地址：北京市朝阳区垂杨柳中街 1 号

邮　　　　编：100022

联系电话：67782910-8002

关于函数图象对称性的研究

北京工业大学附属中学　　　胡丛远

指导教师：叶欣

引言：　有幸在高一年级接触到 TI 图形计算器. 起初拿到图形计算器时，只是十分新奇，后在指导老师的帮助下，进行了一系列的研究，以下就是我研究的成果.

前言：涣然一新的高中教科书不仅变漂亮了，内容也变的丰富起来. 丰富了内容的同时，也带来了一种全新的学习方法那就是研究性学习.

研究：

Ⅰ.以平行于 y 轴的直线为对称轴

1．以直线 x=0 为对称轴

在学习指数函数的时候我们知道：当底数 a＞1 时，　函数 $y=a^x$ 是增函数；当底数 0＜a＜1 时，函数为减函数，且图象都过（0，1）点.

【探究 1】当底数 a 互为倒数时，图象应该有什么关系？

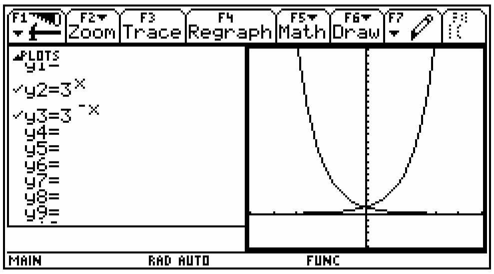
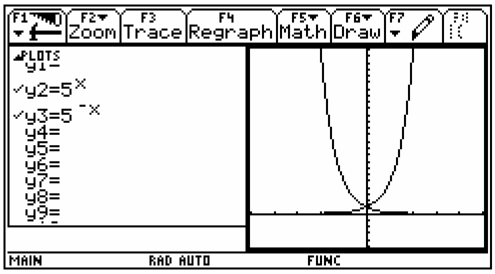


图 1
←
图 2
→



我用 TI 图形计算器画了一些底数各不相同的指数函数的图象，发现底数互为倒数的两个指数函数的图象关于 y 轴（即直线 x＝０）对称『如图 1、2』.

〖成果 1〗函数 $y=a^x$ 与 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$　$(a>0,a\neq1)$ 的图象关于 y 轴对称.

『推广 1』：函数 $y=f(x)$与$y=f(-x)$ 的图象关于 y 轴对称.

证明：取函数 $y=f(x)$ 的图象上任一点 P（x，y），

则点 P 关于 y 轴的对称点是 P′（－x，y）.

∵ $f[-(-x)]=f(x)=y$

∴点 P′（－x，y）在函数 $y=f(-x)$ 的图象上.

∴函数 $y=f(x)$与$y=f(-x)$ 的图象关于 y 轴对称.

反之，易证.

2．以直线 x=b 为对称轴

【探究 2】若两个函数的图象不是关于 y 轴对称，而是关于直线 x＝b 对称，那么相应的解析式是什么呢？

我仍然选取指数函数作为研究对象，经过多次举证（图２、图３），我发现如下结论:

$h(x)=(\frac{1}{4})^{x+2}$ 与 $g(x)=4^x$ 关于直线 x=-1 对称；[图 3]

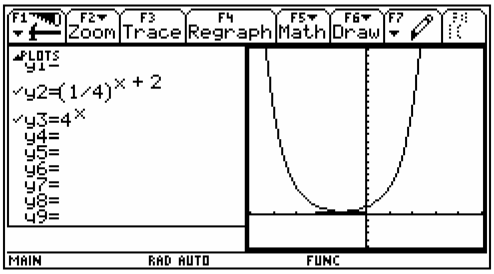


图 3↑

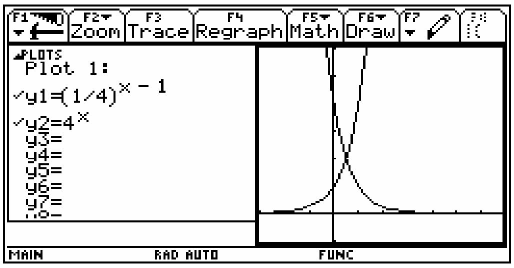


图 4↑

$h(x)=(\frac{1}{4})^{x-1}$ 与 $g(x)=4^x$ 关于直线 x=0.5 对称[图 4]

$h(x)=(\frac{1}{4})^{x-2}$ 与 $g(x)=4^x$ 关于直线 x=1 对称；[图 5]

$h(x)=(\frac{1}{4})^{x-4}$ 与 $g(x)=4^x$ 关于直线 x=2 对称；[图 6]

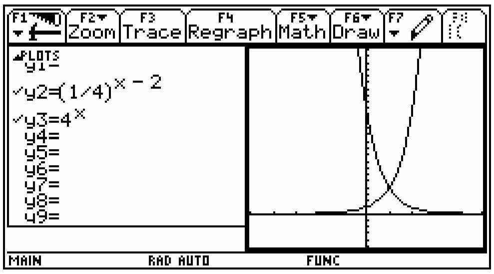


图 5↑

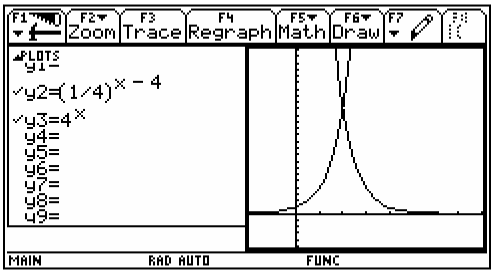
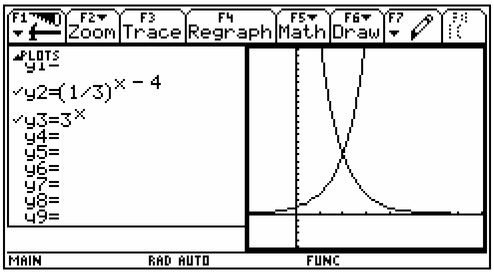


图 6↑



[图 7]

$h(x)=(\frac{1}{3})^{x-4}$ 与 $g(x)=3^x$ 关于直线 x=2 对称．[图 7]

经过观察，我发现对称轴的变化，和底数的大小变化无关，与指数的变化有着一定的联系．经过多次实验得到如下结论：

$y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-2}$ 与 $y=a^x$ 关于直线 x= 1 对称；$y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-4}$ 与 $y=a^x$ 关于直线 x= 2 对称；

$y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-6}$ 与 $y=a^x$ 关于直线 x=3 对称；$y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-8}$ 与 $y=a^x$ 关于直线 x=4 对称……

〖成果２〗 $y=a^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-2b}$ $(a>0,a\neq 1)$ 关于直线 x=b 对称．

『推广２』函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(2b-x)$ 关于直线 $x=b$ 对称．

证明：取函数 $y=f(x)$ 的图象上任一点 P（x，y），

则点 P 关于直线 x＝b 的对称点是 P′（x'，y）.

∵由对称性可知：$\dfrac{x+x'}{2}=b$，经变形可得：$x'=2b-x$

∴点 P′ 的坐标是（2 b－x，y）

又∵ $f[2b-(2b-x)]=f(x)=y$

∴点 P′（2 b－x，y）在函数 $y=f(2b-x)$ 的图象上.

∴函数 $y=f(x)$与$y=f(2b-x)$ 的图象关于直线 x＝b 对称.

反之，易证.

综上所述，函数 $y=f(x)$与$y=f(2b-x)$ 关于直线 x＝b 对称．其中，b＝ 0 时，函数 $y=f(x)$与$y=f(-x)$ 的图象关于 y 轴对称.

Ⅱ．以直线 y＝c 为对称轴

【探究 3】怎样的两函数的图象才能关于直线 y＝c 对称？

通过采用与上述办法相类似的研究方法，我得到如下结论：

函数 $y=f(x)$与$y=2c-f(x)$ 的图象关于直线 y＝c 对称．其中，当 c＝ 0 时，函数 $y=f(x)$与$y=-f(x)$ 的图象关于 x 轴对称.

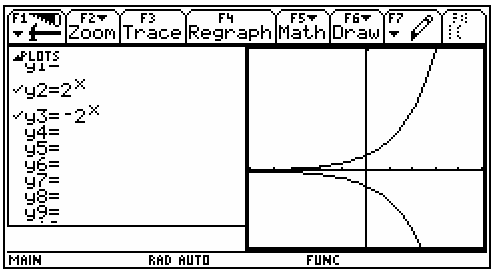


图 8↑

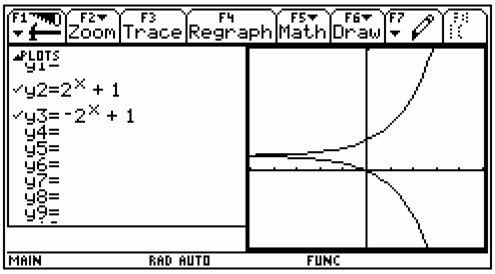


图 9↑

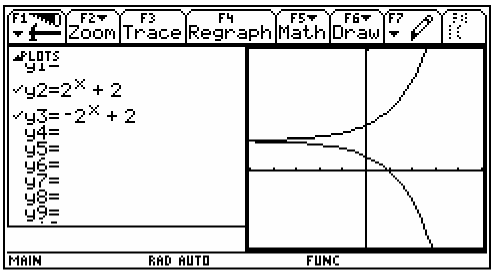


图 10↑

参考文献：《TI 教育技术——学生作文集》