2010 年上海市 T I 杯高二年级数学竞赛答案

个 人 赛 试 题 答案

一、填空题

题 号	1	2	3	4
答 案	465	0. 999171	3.086×10^{13}	12
题 号	5	6	7	8
答 案	5	3	1.0452	4624

二、**解** 不妨设正方形的边长为 2，以 DC 为 x 轴，DC 的中点为原点 O 建立直角坐标系，则 A（－1，2），B（1，2），设 M（x，0），则 $\dfrac{MA}{MB}$ 取最大值时，显然 $x>0$.

$$u=\left(\frac{MA}{MB}\right)^2=\frac{(x+1)^2+4}{(x-1)^2+4}=1+\frac{4x}{x^2-2x+5}$$

$$=1+\frac{4}{x+\dfrac{5}{x}-2}\le1+\frac{4}{2\sqrt{5}-2}$$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

从而 $\dfrac{MA}{MB}\le\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，当 $x=\sqrt{5}$ 时不等式等号成立.

故 $\dfrac{MA}{MB}$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ (或 1.618) .

三、**解** 由题设知 $A_1'(x_1,\frac{1}{2}x_1^2), A_2'(x_2,\frac{1}{2}x_2^2)$，则

$$k_{A_1'A_2'}=\frac{\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)}{x_2-x_1}=\frac{1}{2}(x_2+x_1).$$

直线 $A_1'A_2'$ 的方程为： $y-\frac{1}{2}x_2^2=\frac{1}{2}(x_2+x_1)(x-x_2)$.

令 $y=0$，得 $$\frac{1}{x}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2},$$

即 $$\frac{1}{x_3}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}.$$

同理可得 $\frac{1}{x_4}=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$， $\frac{1}{x_5}=\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$，$\cdots$.

所以 $$\frac{1}{x_6}=\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5}=\frac{2}{x_4}+\frac{1}{x_3}=\frac{3}{x_3}+\frac{2}{x_2}$$

$$=\frac{5}{x_2}+\frac{3}{x_1},$$

故由 $x_1=6$，$x_2=2$，得 $x_6=\frac{1}{3}$.

四、**解** （1）对整数 $n\geq 2$，有
$$a_n=\sqrt{a_{n-1}+(n-1)^2}>n-1. \qquad ①$$

下面证明：$a_n<n,\ n=2,3,\cdots$.

首先，$a_2=\sqrt{a_1+1}=\sqrt{2}<2$，当 $n\geq 3$ 时，若 $a_{n-1}<n-1$，则
$$a_n=\sqrt{a_{n-1}+(n-1)^2}<\sqrt{(n-1)+(n-1)^2}=\sqrt{n(n-1)}<n,$$

故 $a_n<n,\ n=2,3,\cdots$.

综上所述，$[a_n]=n-1, n=2,3,\cdots$.

（2）由（1）及题设可得，当 $n\geq 3$ 时，
$$[a_n^2]=[a_{n-1}+(n-1)^2]=[a_{n-1}]+(n-1)^2=(n-2)+(n-1)^2$$

$$=n(n-1)-1,$$

所以，$[a_1^2]=1$， $[a_1^2]+[a_2^2]=3$，当 $n\geq 3$ 时，

$$[a_1^2]+[a_2^2]+\cdots+[a_n^2]=[a_1^2]+[a_2^2]+\sum_{k=3}^{n}[a_k^2]$$

$$=3+\sum_{k=3}^{n}k(k-1)-(n-2)$$

$$=5-n+\frac{1}{3}\sum_{k=3}^{n}\left\{(k+1)k(k-1)-k(k-1)(k-2)\right\}$$

$$=5-n+\frac{1}{3}\left\{(n+1)n(n-1)-6\right\}$$

$$=\frac{1}{3}(n^3-4n+9).$$

注意到，当 $n=2$ 时，$\frac{1}{3}(n^3-4n+9)=3$，所以

$$\left[a_1^2\right]+\left[a_2^2\right]+\cdots+\left[a_n^2\right]=\begin{cases}1, & \text{当 } n=1 \text{时}, \\ \frac{1}{3}(n^3-4n+9), & \text{当 } n\geq 2 \text{时}.\end{cases}$$

2010 年上海市 T I 杯高二年级数学竞赛答案

团体赛试题答案

一、**解** 设 $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2)$．由方程组

$$\begin{cases} y = 1 - x^2, \\ y = x + a \end{cases}$$

消去 y 得
$$x^2 + x + a - 1 = 0\,,$$

所以
$$x_1 + x_2 = -1, \qquad x_1 x_2 = a - 1\,.$$

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 2(x_2 - x_1)^2 \\ &= 2\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2\right] = 2(5 - 4a)\,. \end{aligned}$$

点 $C(1,\ 0)$ 到直线 AB： $x - y + a = 0$ 的距离 $d = \dfrac{|1+a|}{\sqrt{2}}$．所以

$$\begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2}|AB| \cdot d = \frac{1}{2}\sqrt{(5 - 4a)(1 + a)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2(\frac{5}{2} - 2a)(1 + a)(1 + a)} \\ &\le \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot \left(\frac{\frac{5}{2} - 2a + 1 + a + 1 + a}{3}\right)^3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,, \end{aligned}$$

当 $a = \dfrac{1}{2}$ 时，上述不等式等号成立．

故三角形 ABC 面积的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$．

二、**解** 由题设知$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$，故数列$\{a_n\}$是等比数列. 设$a_2=x$，则数列$\{a_n\}$的公比是$\dfrac{x}{2}$. 所以，$a_5=2\left(\dfrac{x}{2}\right)^4=\dfrac{x^4}{8}$.

由于a_5是正整数，所以$2|x$，令$x=2y$，则$a_5=2y^4$，故

$$2y^4\le 2010,$$

所以$y\le 5$，故$y=1,2,3,4,5$，于是a_5=2, 32，162，512, 1250 .

三、**解** (1) 由于每一步减少了 7 个数，故经过$\dfrac{666-1}{7}=95$步后，黑板上只剩下了一个数.

（2） 由于 666－512=154，于是经过$\dfrac{154}{7}=22$步后，黑板上有 512 个数.

22 步中，划去了 22×8＝176 个数，他们的和为

$$1+2+\cdots+176=88\times177.$$

记$S=1+2+\cdots+666=333\times667$， 则经过 22 步后，剩下的 512 个数的和还是 S.

假设原来有8^k个数，他们的和为 x，则经过8^{k-1}步后，原来的8^k个数都划去了，黑板上剩下的8^{k-1}的和仍然是 x，因此当继续下去只到黑板上只剩下一个数时，所有数的和是$(k+1)x$.

所以，当黑板上只剩下 1 个数时，在黑板上出现过的所有数的和为

$$88\times177+4s=88\times177+4\times333\times667=904020.$$